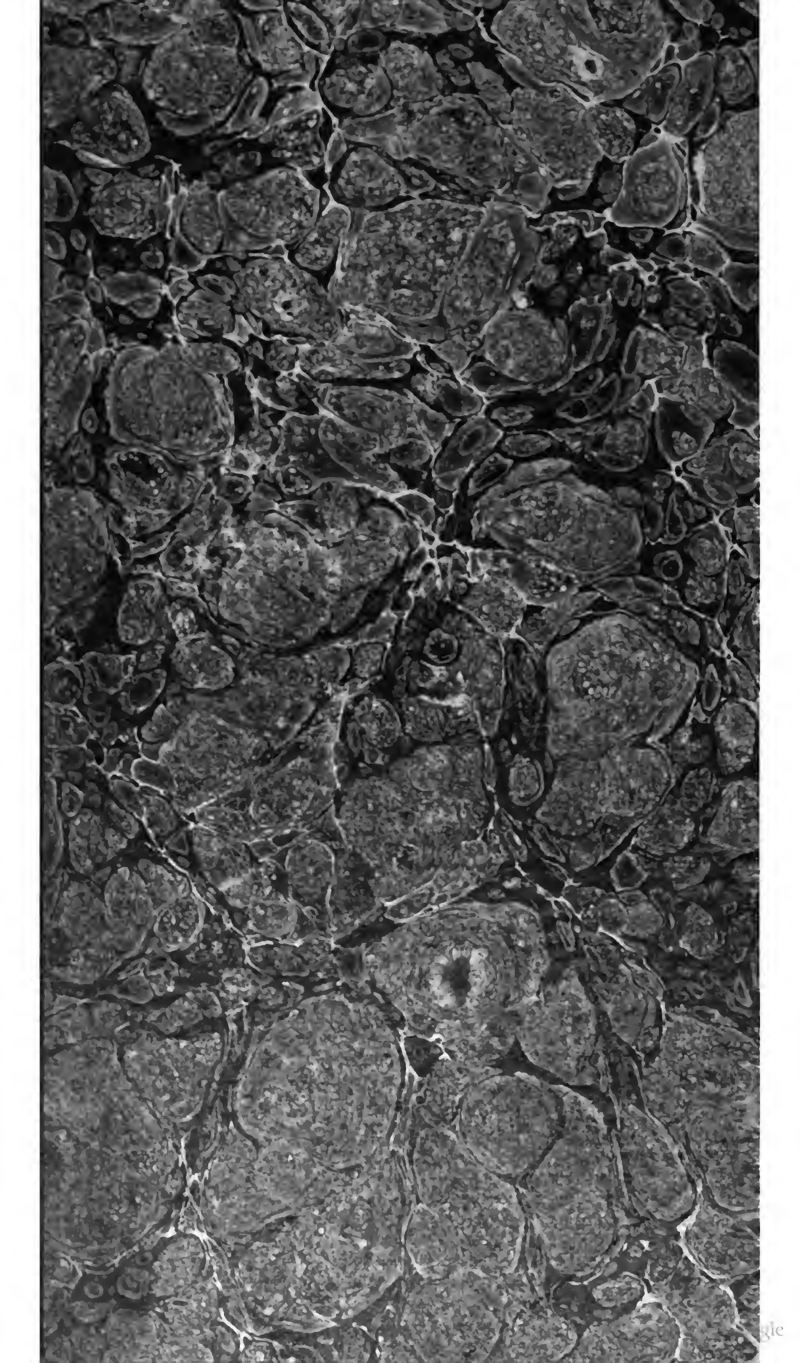
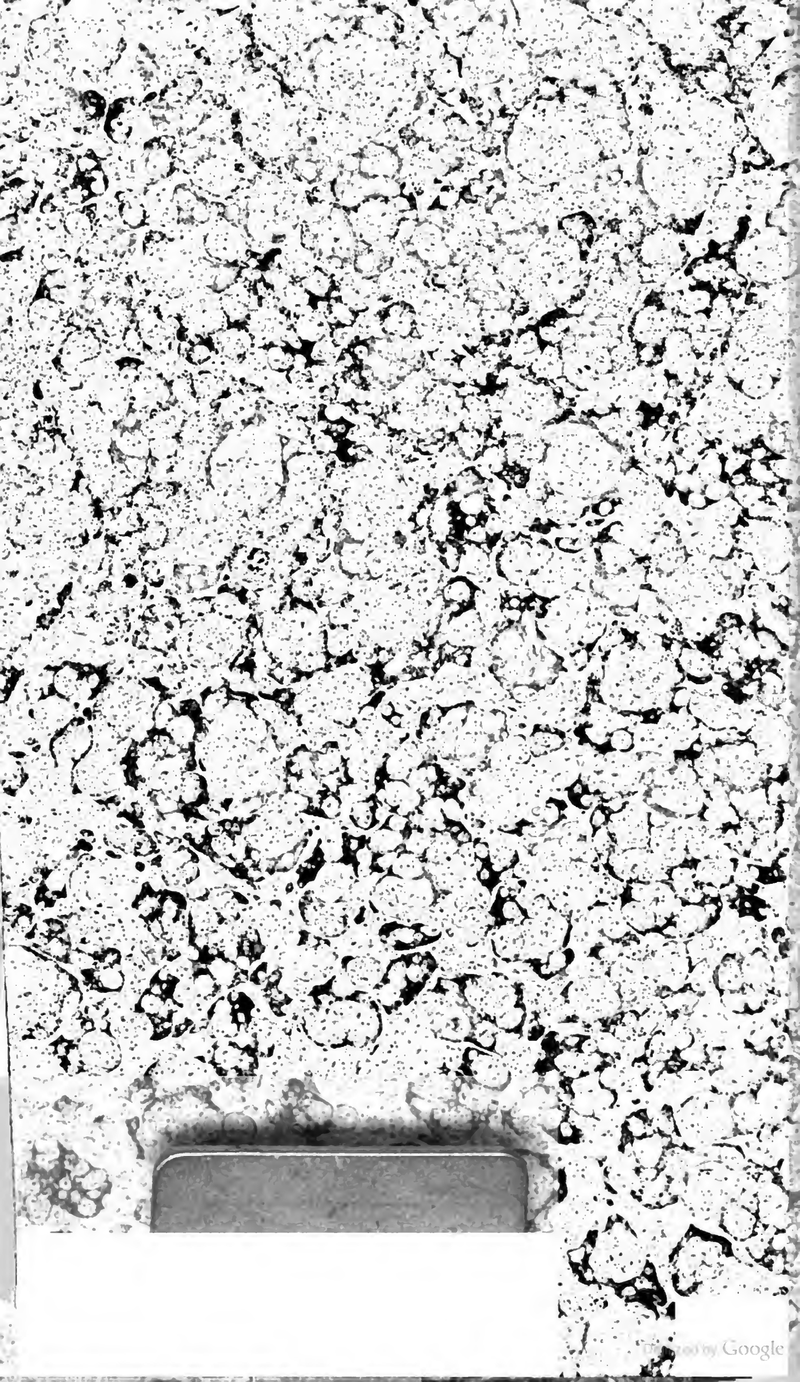
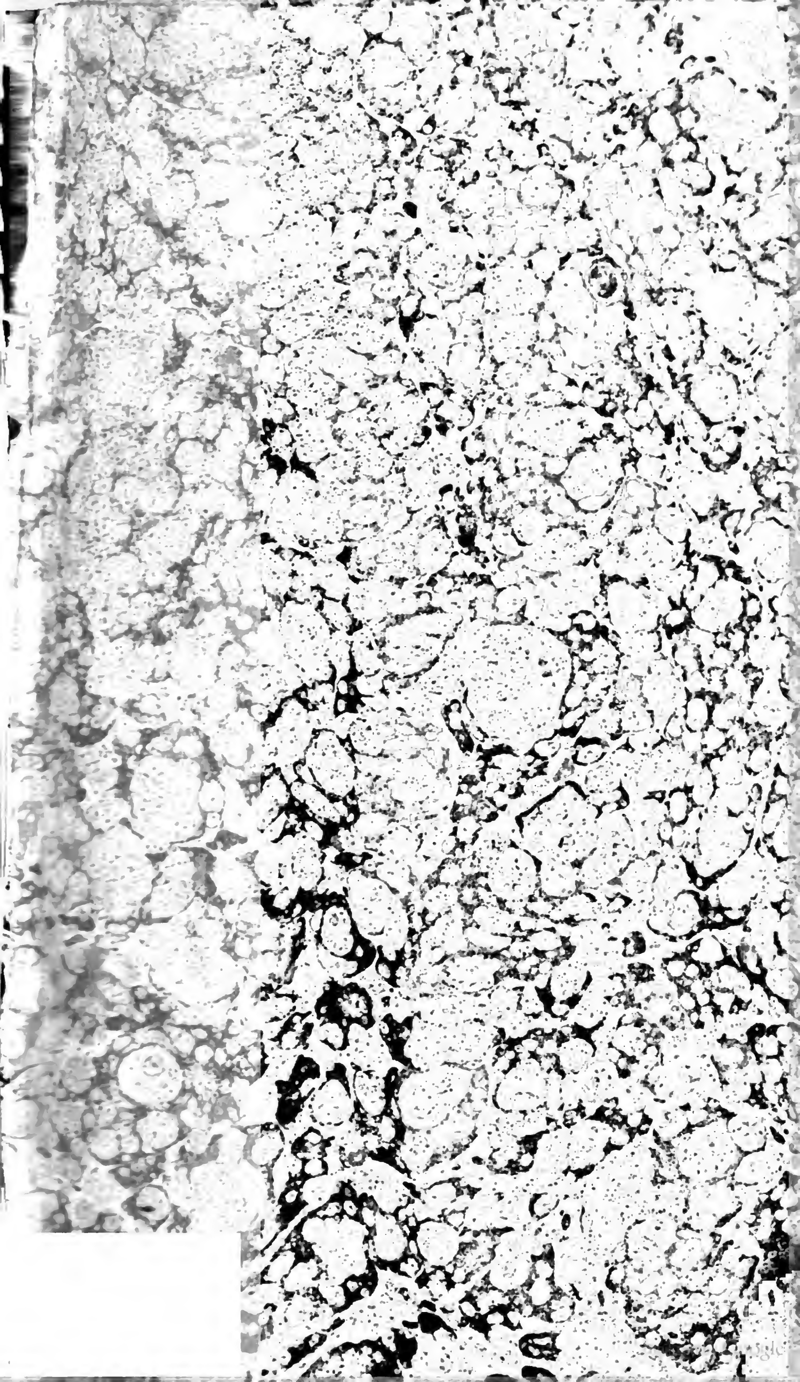






ENCYCLOPÉDIE-RORET.

MANUEL

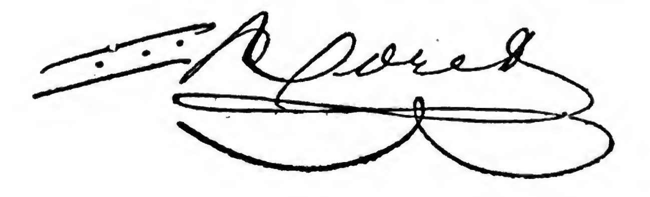
DE

GÉOMÉTRIE.



AVIS.

Le mérite des ouvrages de l'*Encyclopédie-Roret* leur a valu les honneurs de la traduction, de l'imitation et de la contrefaçon. Pour distinguer ce volume il portera, à l'avenir, la *véritable* signature de l'éditeur.



PARIS, — IMPRIMERIE ET FONDERIE DE FAIN,
rue Racine, 4, place de l'Odéon.

MANUELS-RORET.

NOUVEAU MANUEL DE GÉOMÉTRIE.

OU

EXPOSITION ÉLEMENTAIRE DES PRINCIPES DE CETTE SCIENCE,

COMPRENANT LES DEUX TRIGONOMÉTRIES, LA THÉORIE DES PROJECTIONS, ET LES PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES LIGNES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ, PLUS DEUX APPENDICES SUR LA GÉOMÉTRIE DU COMPAS ET SUR LES PRINCIPALES FORMULES RELATIVES AUX LIGNES DU SECOND DEGRÉ.

PAR O. TERQUEM,

Docteur ès-sciences, Officier de l'Université, Membre de la Légion-d'Honneur, Professeur aux Écoles royales d'Artillerie, Bibliothécaire du Dépôt central de l'Artillerie, et Membre de l'Académie de Metz.

NOUVELLE ÉDITION,

CORRIGÉE, SIMPLIFIÉE ET ORNÉE DE PLANCHES.

Autorisé par l'Université dans les Colléges et les Écoles normales primaires.

PARIS,

A LA LIBRAIRIE ENCYCLOPÉDIQUE DE RORET,

RUE HAUTEFEUILLE, N° 10 BIS.

1838.

Auteurs cités dans ce Manuel.

* La démonstration sur la solidité de la pyramide (page 270) est due à M. Querret.

Signes et abréviations employés dans ce Manuel.

Signes.	Valeurs.	Signes.	Valeurs.
$+$	*plus.*	sin.	*sinus.*
$-$	*moins.*	cos.	*cosinus.*
$=$	*égal.*	tang.	*tangente.*
$\times$	*multiplié par.*	cot.	*cotangente.*
$:$	*est à.*	séc.	*sécante.*
$::$	*comme.*	coséc.	*cosécante.*
$\sqrt{}$	*racine carrée.*	c. q. f. d.	*ce qu'il fallait démontrer.*
$>$	*plus grand que.*		
$<$	*plus petit que.*	c. q. f. t.	*ce qu'il fallait trouver.*

PRÉFACE.

Le plus ancien auteur connu d'élémens de géométrie et même d'arithmétique vivait à Alexandrie, sous le premier des Ptolémée, dans le troisième siècle avant l'ère vulgaire. A l'époque d'Euclide, les chiffres n'existaient pas encore chez les peuples occidentaux, l'imprimerie n'était pas inventée; il n'y avait point de livres divisés en feuilles, subdivisés en pages numérotées, reliés sous forme de parallélipipèdes compactes. On ne connaissait que des manuscrits tout d'une pièce, roulés en cylindres, sans numérotage, sans réclame et souvent même sans intervalle entre les mots; car, la matière était chère et il fallait ménager la place. Dans cet état de choses, il devenait extrêmement difficile de faire des citations et d'indiquer les endroits cités. Dans un ouvrage de quelque étendue, l'auteur devait se fier à sa mémoire pour ne pas s'exposer, soit à se répéter, soit à se contredire. Toutefois, la géométrie repose

entièrement sur des citations. Le dernier théorème s'appuie sur tous ceux qui le précèdent, et qu'il faut sans cesse avoir présens à l'esprit. Que fait Euclide ? dès qu'il a besoin d'une proposition démontrée auparavant, il la copie en entier ; il aura fait cent fois un certain genre de raisonnement, qu'il le répétera la cent et unième fois et dans les mêmes termes. Ces répétitions avaient l'avantage d'imprimer la science dans la mémoire du disciple; elles étaient même obligées, comme celles qu'on rencontre dans Homère, et par le même motif, de rappeler au lecteur ce qu'il avait déjà lu et qu'il ne pouvait plus aisément retrouver. D'ailleurs, la méthode d'Euclide était excellente pour faire ressortir l'immense supériorité de la dialectique des géomètres; ils posent toujours les mêmes définitions, laissant toujours aux mots les mêmes acceptions, aux choses les mêmes propriétés, ne s'avançant jamais au hasard et pour ainsi dire ne plaçant une assise que lorsque celles de dessous sont entièrement consolidées. Aussi l'ouvrage d'Euclide fut dès son apparition, et mérita d'être l'objet d'un culte qui s'est perpétué chez les modernes; jusqu'au 17e. siècle, les *quinze livres* étaient à peu près le seul ouvrage classique. Cepen-

dant une grande révolution s'opérait. Les anciens avaient une tendance à ramener l'arithmétique à la géométrie ; on commença à suivre une direction opposée. D'abord, les longueurs des lignes, leurs rapports, furent évalués en nombres ; au lieu de construire des triangles, on fut à même de les calculer ; ensuite Cavaleri et surtout Wallis réduisirent l'évaluation des surfaces et des volumes à des sommations de séries ; dès-lors pour faire entrer dans l'arithmétique toute la science de l'espace, il ne restait qu'à exprimer numériquement des positions et des formes. Or la forme d'une ligne, d'une surface, ne consiste que dans la loi de succession, dans la position des points, et cette position peut être assignée au moyen de distances évaluables en nombres. Descartes fit cet immense pas et ouvrit aux sciences exactes une source d'où découlent tous les progrès qu'elles ont faits jusqu'à nos jours. Newton devina toute l'étendue de la nouvelle méthode et proclama *l'arithmétique universelle*, qui s'applique aux temps, aux espaces, aux forces, à tout ce qui dans l'univers est mesurable. L'instrument de cette arithmétique n'est pas un système restreint de numération, mais un ensemble général de signes d'opéra-

tions qui porte un nom d'origine douteuse. C'est *l'algèbre*. La révolution cartésienne dut exercer une grande influence sur l'enseignement mathématique; les Bernoulli, l'Hôpital, et divers géomètres du continent cultivèrent la méthode algébrique, et la perfectionnèrent sans cesse. C'est surtout Euler qui en comprit tous les avantages et s'en servit le premier pour démontrer la mécanique. « *Usus sum methodo analytica, quæ synthesi in instruendo merito longe præferri solet.* » (Mech., t. 1, dédicace.)

On sait que Newton, forcé de céder aux préjugés mathématiques de son siècle, a été contraint d'écrire ses principes dans le style synthétique. Voici ce qu'en dit Euler dans la préface de l'ouvrage cité :

« *Sed quod omnibus scriptis, quæ sine analysi sunt composita, id potissimum mechanicis obtingit, ut lector, etiamsi de veritate eorum quæ proferantur convincatur, tamen non satis claram et distinctam eorum cognitionem assequatur, ita ut easdem quæstiones, si tantillum immutentur, proprio marte vix resolvere valeat, nisi ipse in analysin inquirat, easdemque propositiones analytica methodo evolvat.*

Idem omnino mihi cum Newtoni principia et Hermani Phoronomia perlustrare cœpissem usu venit, ut quamvis plurium problematum solutiones satis percepisse mihi viderer, tamen parum tantum discrepantia problemata resolvere non potuerim. Illo igitur tempore, quantum potui, conatus sum analysin ex synthetica illa methodo elicere, easdemque propositiones ad meam utilitatem analytice pertractare, quo negotio insigne cognitionis meæ augmentum percepi. Simili deinde modo alia quoque passim dispersa ad hanc scientiam spectantia scripta sum persecutus; quæ omnia ad meum usum methodo plana et æquabili exposui, atque in ordinem idoneum digessi. » . . . .

Ces aveux échappés à un savant sincère, honnête, modeste et qui possédait aussi le plus grand génie mathématique qui ait peut-être jamais existé, ces aveux précieux nous montrent mieux que tous les raisonnemens les avantages de la méthode cartésienne. Toutefois l'Angleterre eut toujours de l'éloignement pour cette méthode, et certes par ce même esprit de nationalité qui repoussa l'algorithme Leibnitzien, si évidemment préférable à la notation fluxionnelle; dans le dernier siècle, le cé-

lèbre Ecossais Robert Simpson donna une nouvelle impulsion à l'étude des anciennes méthodes géométriques en restaurant les porismes d'Apollonius et devinant ceux d'Euclide; Thomas Simpson publia même des élémens calqués sur ceux du géomètre d'Alexandrie. Ces élémens ont obtenu un illustre suffrage, Legendre les a adoptés; il est à regretter que ce grand géomètre qui, à l'instar d'Euler, a consacré une longue carrière à perfectionner toutes les branches des mathématiques et à en créer une nouvelle, celle des fonctions elliptiques, et qui réunissait dans un degré si éminent la logique sévère des géomètres anciens au talent calculateur des analystes modernes, ait consenti à être imitateur et n'ait pas voulu nous donner une science de l'espace qu'il aurait porté de prime abord à la perfection.

La géométrie proprement dite ne contient réellement que trois propositions fondamentales : la somme des angles du triangle, l'aire du rectangle et le volume du parallélipipède rectangle; tout le reste, secondaire, subordonné, est le plus souvent le résultat d'un calcul de rapports, d'un calcul *trigonométrique* qui a l'avantage d'indiquer les changemens qu'il faut faire à l'énoncé du théorème, lorsque

les données de la question changent *leurs positions relatives*, deviennent nulles ou infinies. Le passage du commensurable à l'incommensurable, de la droite à la ligne courbe, s'opère toujours facilement et de la même manière, à l'aide de ce principe d'Arbogast : « Si deux quantités constantes sont renfermées entre deux limites variables dont la différence peut descendre au-dessous de toute quantité assignable, les quantités constantes sont égales. » Principe d'une évidence intuitive et qui dispense de recourir aux expédiens hasardeux des *infiniment petits* et aux longueurs rebutantes des *réductions à l'absurde;* quant aux propriétés des lignes et des surfaces, elles peuvent se déduire de la théorie des équations qui, dans cette partie de la science, joue le même rôle que le principe des vitesses virtuelles en mécanique. L'ouvrage de Bézout, trop peu étudié, sur l'élimination, renferme plus de propriétés, de lignes et de surfaces algébriques, que beaucoup de volumineux traités ayant ces propriétés pour but spécial de recherches. Les annales mathématiques de M. Gergonne contiennent aussi beaucoup de documens précieux, propres à enrichir et surtout à simplifier l'enseignement de la science.

Géométrie.

MANUEL

DE

GÉOMÉTRIE.

1. La délimitation des divers pays occupés par les nations, la fixation des bornes entre les propriétés territoriales des particuliers, sont des opérations qui ont donné naissance à une science que, d'après son origine, on appelle *Géométrie* ou *Science de la mesure des terres* (1).

2. Ces opérations exigent que l'on puisse figurer sur un petit espace, tel qu'une feuille de papier, de grandes étendues territoriales; de manière que la figure dessinée représente exactement en petit l'étendue et la position de toutes les parties du terrain. Par la nécessité d'établir une parfaite similitude entre les objets et leurs représentations figurées en petit, on a été amené à étudier les propriétés de ces figures, indépendamment de la nature des objets. L'ensemble de ces propriétés, réunies en corps de doctrine, constitue la science de l'étendue

(1) Γῆ, ἡ, la terre; μετρέω, je mesure.

en général. Toutefois, on la désigne encore sous le nom de *Géométrie*, quoiqu'il ne s'agisse plus spécialement ni de pays, ni de champs ou de tout autre objet territorial.

3. Quelle que soit la nature des corps, ils remplissent un espace plus ou moins considérable; on a donné à cet espace le nom de *volume;* ainsi, un vase étant rempli de liquide, si on le vide entièrement l'espace vide représente le volume du liquide; de même dans un moule, le vide est le volume de l'objet qu'on doit y fondre. L'image dans une glace occupe un volume et ne renferme aucun corps.

4. On donne le nom de *surface* à l'enveloppe du volume, à ce qui le limite de toutes parts; c'est sur la surface des corps que l'on dessine; on écrit sur la surface du papier.

La paroi d'un vase en est la surface intérieure, etc., et l'ombre portée par un corps est une surface.

5. On appelle *ligne* le contour d'une surface, ce qui la limite de toutes parts; ainsi les bords de l'ombre, ceux d'une table, sont des lignes.

6. L'endroit où deux surfaces se rencontrent se nomme leur *intersection;* on peut la regarder comme une limite commune aux deux surfaces; par conséquent, cette intersection est une ligne. Par exemple, l'intersection des surfaces de deux murs dans un appartement, celle de la surface d'une rivière avec la surface du rivage, sont des lignes.

7. On peut tracer sur une surface donnée

une infinité de lignes; car on peut imaginer une infinité de surfaces qui rencontrent la surface donnée (6).

8. L'extrémité d'une ligne se nomme *point.* Il s'ensuit que l'endroit où deux lignes se coupent, que leur intersection est un point; car cette intersection peut être considérée comme l'extrémité commune aux deux lignes. Ainsi dans une table, les endroits où deux bords se rencontrent sont des points.

9. On peut prendre sur une ligne une infinité de points, car on peut imaginer une infinité de lignes qui rencontrent la ligne donnée; par conséquent on peut aussi prendre sur une surface une infinité de points (7).

10. L'intersection de trois surfaces est un point; car, considérées deux à deux, les surfaces se coupent suivant trois lignes (6), et l'endroit où ces trois lignes se coupent est le point commun aux trois surfaces: ainsi, dans une chambre, chaque coin est un point d'intersection des surfaces des deux murs adjacens et de la surface du plancher ou du plafond.

11. Parmi toutes les lignes, il en existe une à laquelle nous rapportons toutes les autres, dont tout le monde a le sentiment, c'est la *ligne droite;* il n'est pas possible et il n'est pas nécessaire de la définir: c'est une *notion première.*

12. Par deux points, on peut toujours faire passer une droite, mais pas plus d'une droite, et cette droite peut être indéfiniment prolongée dans les deux sens, par chacune de ses deux extrémités.

13. Parmi toutes les surfaces, il en existe une à laquelle nous rapportons toutes les autres, et dont chacun a le sentiment; c'est la *surface plane*. On peut la définir à l'aide de la ligne droite; en effet, une surface est *plane* lorsque prenant à volonté deux points dans cette surface (9) et les joignant par une droite (12), dans quelque sens qu'on prolonge cette droite, elle reste toujours sur la surface; ainsi les murs de nos appartemens, les tables, le papier, sont autant de surfaces planes. Les colonnes ne présentent pas des surfaces planes, parce qu'on ne peut mener des droites que dans le sens de leur longueur. On donne aussi à la surface plane le nom abrégé de *plan* : ainsi une *surface plane* et un *plan* sont deux mots qui ont même signification.

14. Par un point donné, on peut faire passer une infinité de plans. En effet, menant un plan par ce point, on peut donner à ce plan une infinité de positions sans lui faire quitter ce point; on peut réaliser ce mouvement en plaçant une feuille de papier sur la pointe d'un canif.

15. Par la même droite, on peut faire passer une infinité de plans; même raisonnement que dessus (14) : on voit ce mouvement dans une porte qui tourne autour de la ligne de ses gonds.

16. Par deux droites qui se rencontrent, on ne peut faire passer qu'un seul plan; en effet, menant un plan par l'une de ses droites et le faisant tourner autour de cette droite jusqu'à ce qu'il passe aussi par la seconde droite, il est évident qu'alors sa position sera

fixée, et il ne peut faire aucun mouvement sans quitter l'une ou l'autre droite.

17. Nous allons étudier les propriétés des lignes droites, et nous les supposerons toujours tracées dans le même plan. Il faut faire bien attention à cette observation que nous ne répéterons plus.

Deux droites; angles; perpendiculaires.

18. Une droite étant déterminée, lorsqu'on connaît ses deux extrémités (12), on est convenu de désigner une droite par deux lettres placées à ses extrémités; ainsi, AB ou BA (*fig.* 1) désigne la droite qui passe par les points A et B.

19. Deux droites AB et AC qui se coupent en un point A, ont des *directions* différentes dans l'espace. La *direction* est une notion première qui n'est pas susceptible d'être définie. La différence de cette direction se nomme aussi *écartement* ou *angle;* on le désigne à l'aide des lettres qui désignent les droites, et plaçant la lettre commune au milieu; ainsi on dit l'angle BAC, ou CAB, pour désigner l'écartement de deux droites AB et AC.

20. (*Fig.* 1.) Un angle est plus ou moins considérable; ainsi l'angle DAC est plus grand que l'angle BAC, et plus petit que l'angle EAC; et les deux angles BAC, BAD, sont égaux lorsques AC est aussi écarté de AB que AD l'est de AB; alors faisant tourner l'angle BAC autour de BA, la droite AC doit tomber sur AD, et dans ce cas, l'angle DAC est le double de l'angle BAC, et celui-ci est la moitié de l'angle DAC.

21. Si les trois angles EAD, DAB, BAC sont égaux, l'angle BAC sera le tiers de l'angle EAC; l'angle DAC en sera les $\frac{2}{3}$, et ainsi de suite. On conçoit comment deux angles peuvent être entre eux comme nombre à nombre, par exemple comme 5 est à 7; alors le $\frac{1}{5}$ du premier angle est égal au $\frac{1}{7}$ du second angle.

22. (*Fig.* 1.) On nomme *côtés* de l'angle BAC les deux droites BA, AC qui forment l'angle, et on donne le nom de *sommet* au point A d'intersection.

23. (*Fig.* 2.) Deux angles BAC, BAD sont dits *adjacens* lorsqu'ils sont formés par la droite commune AB et les parties AC et AD d'une autre droite.

24. Un angle EAC est dit *droit* lorsqu'il est égal à son adjacent EAD, et la droite AE est dite *perpendiculaire* sur la droite DAC.

25. L'angle BAC, plus petit que l'angle droit EAC, est un angle *aigu;* et l'angle BAD, plus grand que l'angle droit, se nomme *angle obtus.*

26. Il est évident que l'angle BAE est la quantité dont l'angle aigu BAC diffère de l'angle droit; et ce même angle est l'excès de l'angle obtus BAD sur l'angle droit; donc *la somme de deux angles adjacens est toujours égale à deux angles droits.*

27. *Tous les angles droits sont égaux entre eux;* en effet, quel que soit cet angle, on peut appliquer un de ses côtés sur DC, et son sommet sur A; alors le second côté tombera sur AE; car s'il tombait à droite comme AB, l'angle BAC est nécessairement plus petit que BAD; par conséquent BAC ne peut être droit (14): on démontrera de même que le se-

cond côté ne peut tomber à gauche de AE; donc il tombe sur AE, et par conséquent aussi *d'un même point* A *on ne peut élever plus d'une perpendiculaire* AE *sur la droite* DAC.

28. L'angle droit étant de grandeur constante, il s'ensuit qu'il peut servir d'unité de mesure pour les angles; ainsi l'angle droit étant représenté par 1, la fraction $\frac{1}{3}$ désignera un angle compris trois fois dans l'angle droit; la fraction $\frac{4}{5}$ un angle aigu égal aux $\frac{4}{5}$ de l'angle droit; le nombre fractionnaire $\frac{7}{4}$ désigne un angle obtus égal à l'angle droit, plus les $\frac{3}{4}$ de l'angle droit. Et, en général, pour désigner un angle, il faudra chercher le nombre qui exprime le rapport de cet angle à l'angle droit : nombre qui peut même être irrationnel.

29. La somme des deux angles adjacens BAD, BAC, étant égale à deux angles droits (26), il est évident que toute ligne telle que AC′, qui s'élève au-dessus de AC, formera deux angles BAD, BAC′, dont la somme est moindre que deux angles droits; et si elle s'abaisse au-dessous de AC, cette somme sera plus grande que deux angles droits. D'où l'on conclut, 1° *que lorsqu'on réunit deux angles* BAD, BAC, *dont la somme est égale à deux angles droits, les deux côtés* DA, AC, *ne forment qu'une seule ligne droite;* 2° *qu'une droite* AD *ne peut avoir qu'un seul prolongement* AC, *suivant la même direction, et que par conséquent une droite est entièrement déterminée dans toute son étendue par deux quelconques de ses points;* 3° *que deux droites ne peuvent se couper en plus d'un point.*

30. La somme de tous les angles DAE,

EAB, BAC′, C′AC, ayant pour sommet commun le point A, et situés d'un même côté de la droite DAC, est égale à deux angles droits; il en est de même de la somme des angles DAL, LAE′, E′AC′, C′AC, situés de l'autre côté de la droite DAC; donc *la somme de tous les angles formés autour d'un même point* A *est égale à quatre angles droits.*

S'il n'y a que trois angles, deux au moins d'entre eux sont obtus.

31. (*Fig.* 3.) Deux droites **BAD, FAC** qui se coupent au point A, y forment quatre angles : deux angles aigus BAC, FAD, opposés par le sommet, et deux angles obtus FAB, DAC, aussi opposés par le sommet. L'angle obtus BAF ayant pour adjacens les deux angles aigus, si on l'ajoute successivement à chacun d'eux, on obtient deux angles droits (26); donc les deux angles aigus sont égaux; il en est de même des angles obtus : donc, en général, *lorsque deux droites se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux.*

32. Si un de ces angles DAE (*fig.* 2) est droit, les trois autres EAC, CAE′, DAE′, sont donc aussi droits; par conséquent si la droite EAE′ est perpendiculaire (24) sur la droite CAD, celle-ci sera aussi perpendiculaire sur la droite EAE′.

Mesure des droites; distances.

33. On a choisi une droite de longueur fixe pour servir d'unité de mesure aux longueurs quelconques des autres droites. Cette longueur fixe varie selon les pays; et souvent, dans le même pays, elle varie d'une province

à l'autre, et quelquefois avec la nature du travail ou de l'objet à mesurer. L'arbitraire ou les besoins des localités ayant le plus souvent présidé au choix de l'unité de longueur, il en a dû résulter une grande multiplicité de mesures ; la France a donné l'exemple d'un système *raisonné* de mesures, dont la base est prise dans la nature. (Voir le *Manuel d'Arithmétique.*) Le *mètre* est le nom de l'unité de longueur ; en représentant le mètre par 1, les nombres 2,7, 3,53, désignent des longueurs égales à 2 mètres et $\frac{7}{10}$ de mètre, à 3 mètres et $\frac{53}{100}$ de mètre, etc. ; et en général pour désigner une droite d'une longueur déterminée il faudra chercher le rapport de cette droite avec le mètre. Ce rapport n'est pas toujours exactement assignable.

34. Anciennement, avant 1795, l'unité de longueur était la *toise* ; elle se subdivisait en 6 pieds ; le pied en 12 pouces ; le pouce en 12 lignes ; la ligne en 12 points. Comme on a encore souvent besoin de connaître ces anciennes mesures, il est bon d'apprendre par cœur le tableau suivant :

$$1^{T} = 6^{pi} = 72^{p} = 864^{l} = 10368^{pts}$$
$$1^{pi} = 12^{p} = 144^{l} = 1728^{pts} = \tfrac{1}{6}^{T}$$
$$1^{p} = 12^{l} = 144^{pts} = \tfrac{1}{12}^{pi} = \tfrac{1}{72}^{T}$$
$$1^{l} = 12^{pts} = \tfrac{1}{12}^{p} = \tfrac{1}{144}^{pi} = \tfrac{1}{864}^{T}$$

35. On nomme *distance* de deux points la longueur de la droite menée entre ces points.

Pour mesurer les distances, on se sert de divers instrumens, tels que mètres, chaînes métriques, rubans métriques, etc. (Voir le *Manuel d'Arpentage.*) La longueur d'une ligne se nomme aussi *dimension.*

Trois droites ; triangles.

36. (*Fig.* 4.) Trois droites HACD, IABG, FBCE se coupent généralement parlant deux à deux en trois points A, B, C, autour desquels elles forment douze angles, dont la somme est égale à douze angles droits (30).

37. On donne à l'espace fermé BAC le nom de *triangle*, parce qu'il ne comprend que les trois angles BAC, ACB, CBA; les distances AB, BC, CA, se nomment les *côtés du triangle;* ainsi chaque triangle a trois côtés et trois angles. On a donné aussi le nom d'angles *intérieurs* aux trois angles du triangle, pour les distinguer des six angles adjacens, qu'on nomme angles *extérieurs*. Les trois autres angles sont opposés par le sommet.

38. (*Fig.* 4.) Un triangle tel que DEF peut s'appliquer sur le triangle ABC et le couvrir entièrement, si le côté DE est égal au côté AB, le côté EF égal au côté AC, et l'angle E égal à l'angle A. En effet, transportant le triangle DEF sur ABC, on pourra placer le côté DE sur le côté AB, l'extrémité D sur B et l'extrémité E sur A; si le point F est hors du plan du triangle ABC, on pourra le faire tourner autour de AB comme charnière jusqu'à ce qu'il vienne dans le plan; alors la ligne EF prendra la direction de AC, à cause de l'égalité des deux angles A et E; et le point F se placera sur C à cause de l'égalité des deux côtés AC et EF; par conséquent les trois sommets du triangle DEF seront donc placés sur les trois sommets du triangle ABC; donc l'angle D est égal à l'angle B, l'angle F à l'angle C, et le côté DF est égal au côté BC.

Le résultat précédent s'énonce ainsi : *deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

Ainsi, tous les triangles qui ont deux côtés égaux et un angle compris égal, sont identiquement égaux ; ont le troisième côté égal et les deux autres angles égaux ; en d'autres termes, ce côté et ces angles sont *déterminés* dès qu'on connaît deux côtés et l'angle compris.

39. (*Fig.* 5.) Si, en outre le côté AB est égal au côté AC, la superposition pourra se faire de deux manières : ou en plaçant le côté DE sur AB, ou en le plaçant sur AC ; dans le premier cas on trouve que l'angle D est égal à l'angle B, et, dans le second cas, on trouve le même angle D égal à l'angle C ; il faut donc que l'angle B soit égal à l'angle C.

40. Un triangle ABC, qui a deux côtés égaux, se nomme *triangle isoscèle*, et le côté inégal se nomme *base* (ισος, égal ; σκελος, jarret). On énonce donc ainsi le résultat précédent : *dans tout triangle isoscèle, les angles opposés aux côtés égaux ou les angles sur la base sont égaux.*

41. Un triangle qui a ses trois côtés égaux se nomme *équilatéral* (*æquum*, égal ; *latus*, côté) ; *dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux* (40).

Le triangle scalène est celui qui a ses trois côtés inégaux (σκαληνος, inégal).

42. (*Fig.* 4.) Un triangle DEF peut s'appliquer sur le triangle ABC, et le couvrir exactement, si le côté DF est égal au côté BC ; l'angle D égal à l'angle B, et F égal à

l'angle C. En effet, transportant le triangle DEF sur ABC, on placera le côté DF sur son égal BC, de manière que D soit sur B, et F sur C; ensuite faisant tourner autour de cette ligne comme charnière, EF prendra la direction de AC, à cause de l'égalité des angles F et C; par la même raison, DE prendra la direction de BA; donc le point E devra se trouver en même temps sur les côtés BA et CA, il tombera donc sur le point A (29); donc l'angle E sera égal à l'angle E, le côté DE au côté AB, et le côté EF au côté AC; ce résultat s'énonce ainsi : *deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal, adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

43. (*Fig.* 5.) Si en outre les deux angles B et C du triangle ABC sont égaux entre eux, alors la superposition précédente pourra se faire de deux manières : soit en plaçant D sur B, et F sur C, ou bien D sur C et F sur B; dans le premier cas, on aura DE égal à AB; et dans la seconde manière, DE sera égal à AC : il faut donc que le côté AB soit égal à AC. Ainsi : *lorsqu'un triangle a deux angles égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux et le triangle est isoscèle* (40) *; et lorsqu'un triangle a trois angles égaux, il est nécessairement équilatéral* (41).

44. La proposition précédente est la *réciproque* de la proposition 40. Pour comprendre ceci, il faut observer que chaque proposition renferme deux parties distinctes : 1°. les *données* ou l'*hypothèse*; 2° la *conclusion*. Ainsi, dans cette proposition, un triangle qui a deux côtés égaux, a deux angles égaux; l'égalité des deux côtés, c'est la partie *hypothétique*, ce

sont les données de la proposition ; tandis que l'égalité des angles, c'est la *conclusion*, la partie qu'il faut démontrer; et, dans cette seconde proposition, un triangle qui a deux angles égaux a aussi deux côtés égaux : l'égalité des angles est la partie hypothétique ; l'égalité des côtés forme la conclusion. En comparant ces deux propositions, on voit que la partie hypothétique de l'une est la conclusion de l'autre, et *vice versâ*; et c'est en quoi consiste la *réciprocité* de deux propositions.

45. (*Fig.* 5.) Si, dans le triangle isoscèle BAC, on mène une droite AK du sommet A au milieu K de la base BC, on formera deux triangles ABK et CAK qui sont égaux ; car l'on a BK=CK, AB=AC, et l'angle B égal à l'angle C (40); donc l'angle AKB est égal à son adjacent AKC, et l'angle BAK est égal à KAC; par conséquent, *dans tout triangle isoscèle, la droite, qui va du sommet au milieu de la base, est perpendiculaire à cette base, et partage l'angle au sommet en deux angles égaux.*

Parallèles.

46. (*Fig.* 6.) *Dans tout triangle* ABC, *l'angle extérieur* ACL *est plus grand que chacun des deux angles intérieurs* ABC, CAB, *qui lui sont opposés;* en effet, au milieu D de AC soit menée la droite BD, qu'on la prolonge jusqu'en M, en faisant DM=BD; menant CM, on formera un triangle DMC égal au triangle ADB; car l'on a AD=CD, BD=DM par construction, et l'angle BDA=MDC (31), donc (38) les deux triangles sont égaux, et l'angle A sera égal à l'angle DCM;

mais l'angle ACL est plus grand que l'angle DCM, donc aussi cet angle extérieur est plus grand que l'angle A; faisant une construction semblable sur le côté BC, on prouvera que l'angle BCN est plus grand que l'angle ABC, or ACL=BCN (30), donc, etc.

Il est facile de démontrer sans aucune construction que l'angle extérieur ACL n'est pas égal à l'intérieur ABC; en effet, si cette égalité avait lieu, la somme des angles ACB, ABC serait égal à deux angles droits; concevons le triangle ABC retourné de manière que B vienne en C et *vice versâ*, et que A soit en A′ au-dessous de BC; ACB et BCA′ formant deux droites, la ligne ACA′ sera droite, de même la ligne ABA′, ce qui est impossible; donc, etc.

(SCHWAB. *Géométrie*, p. 15.)

47. La somme des deux angles intérieurs ABC et ACB est donc plus petite que la somme des deux angles adjacens ACB et ACL, qui valent ensemble deux angles droits (26); donc, *dans tout triangle, la somme de deux angles intérieurs est toujours plus petite que deux angles droits, et la somme des trois angles est plus petite que trois angles droits.* De là on conclut immédiatement, 1° *qu'un triangle ne peut avoir deux angles obtus;* 2° *ni un angle obtus et un angle droit;* 3° *ni deux angles droits. Par conséquent, d'un même point, on ne peut pas abaisser deux perpendiculaires sur une même droite.* 4° *Dans un triangle isoscèle les deux angles sur la base sont aigus.*

48. (*Fig.* 7.) *Si deux droites* CB, DF, *ou* CB, DG, *sont coupées par une troisième*

ligne ABDE, *de manière à former avec elles deux angles obtus* CBD, FBD, *ou un angle obtus et un angle droit* CBD, BDG, *tous deux intérieurs, les deux droites ne pourront pas se couper du même côté où sont ces angles*; car elles formeraient avec la troisième ligne un triangle renfermant deux angles obtus, ou bien un angle obtus et un angle droit, ce qui est impossible (47).

49. (*Fig.* 8) *Si deux droites* CBK, FDL, *sont coupées par une troisième* ABD, *de manière à former avec elle un angle aigu* CBD *et un angle obtus* FDB *dont la somme soit égale à deux angles droits, les deux droites ne pourront pas se couper au-dessus de la droite* ABD, car elles formeraient avec la troisième droite un triangle renfermant deux angles dont la somme est égale à deux angles droits, ce qui est impossible (47); mais, par la même raison, elles ne peuvent se couper de l'autre côté de la droite ABD; car la somme des quatre angles CBD, FDB, KBD, BDL, est égale à quatre angles droits; or, la somme des deux premiers valant deux angles droits, la somme des deux derniers vaudra autant; par conséquent, les deux droites ne pourront se couper ni au-dessus ni au-dessous de la droite ABD, à quelque distance qu'on les imagine prolongées, et ne pourront jamais former un espace fermé avec la droite ABD : le même raisonnement a lieu lorsque les deux droites sont perpendiculaires à la troisième.

50. Deux droites CBK, FDL, situées dans un même plan, sont dites *parallèles*, lorsqu'elles ne peuvent jamais se rencontrer à quelque distance qu'on les imagine prolongées,

ou, ce qui revient au même, lorsqu'elles ne peuvent former un espace triangulaire avec une troisième droite, qui les coupe et à laquelle on a donné le nom de *sécante*. On a distingué aussi par des noms particuliers les angles que forme la sécante avec les parallèles ; en voici le tableau :

CBD, FDB, ou bien **KBD, BDL,**	angles intérieurs d'un même côté.
ABC, ADF, ou bien **ABK, ADL,** ou bien **CBD, FDI,** ou bien **KBD, LDI,**	angles correspondans.
CBD, BDL, ou bien **KBD, BDF,**	angles alternes-internes.
ABC, LDI, **ABK, FDI,**	angles alternes-externes.

51. D'après ces dénominations, la proposition (49) peut prendre ces différens énoncés : *deux droites sont parallèles*, *lorsque*, 1° *la somme des angles intérieurs est égale à deux angles droits ;* 2° *les angles correspondans sont égaux ;* 3° *les angles alternes-internes sont égaux ;* 4° *les angles alternes-externes sont égaux*. Car une quelconque des trois dernières conditions ayant lieu, la première en est une conséquence : par exemple, si l'angle ABC est égal à son correspondant ADF, la somme des deux angles adjacens ABC, CBD, étant égale à deux angles droits, il s'ensuit

que la somme des deux angles intérieurs CBD et ADF, sera aussi égale à deux angles droits ; donc, etc.

52. Les réciproques des quatre propositions (51) s'énoncent ainsi, lorsque deux droites parallèles sont coupées par une troisième droite: 1° *la somme des angles intérieurs est égale à deux angles droits* ; 2° *les angles correspondans sont égaux* ; 3° *les angles alternes internes sont égaux* ; 4° *les angles alternes-externes sont égaux*. L'une quelconque de ces propositions étant admise, les trois autres en sont des conséquences : on n'est pas encore parvenu à démontrer *rigoureusement* aucune d'elles ; on les admet comme des vérités de sentiment, contre lesquelles ne s'élève aucun doute. En effet, la direction étant une notion primitive, on conçoit que deux droites peuvent avoir dans l'espace la même direction, sans pourtant se confondre : cette différence de position et cette identité de direction, sans pouvoir dire en quoi elles consistent, constituent le *parallélisme* ; il s'ensuit que, par le même point, ne peuvent passer deux parallèles à une même droite ; car ces deux parallèles ayant des directions différentes, ne peuvent avoir même direction qu'une troisième droite. Ceci étant admis, il est facile de démontrer la vérité de la première proposition réciproque. En effet (*fig.* 9), soient CBK, FDL, deux droites parallèles rencontrées par la sécante BDI, la somme des deux angles intérieurs CBD, FDB, sera égale à deux angles droits; car si elle était plus petite, on peut mener une droite DN telle que la somme des deux angles CBD, BDN, soit égale à deux angles droits, alors

DN sera parallèle à BC (51); par le même point D, on pourrait donc mener deux parallèles à BC, ce qui est contraire à ce qu'on a admis; on démontrerait de même que la somme des deux angles intérieurs ne peut être plus grande que deux angles droits; donc, etc. Les propositions sur les parallèles sont celles dont on se sert le plus fréquemment en géométrie; il est donc très-important de se les rendre familières, et de bien les graver dans la mémoire. (Note 1.)

53. (*Figure* 7.) Toutes les fois donc *que deux droites* BC, DF *sont rencontrées par une troisième* ABDE, *si la somme des deux angles intérieurs* CBD, FDB *n'est pas égale à deux angles droits, les deux droites ne seront pas parallèles*; car, si elles étaient parallèles, cette somme serait égale à deux angles droits (52): le point de rencontre O a lieu du côté où la somme des angles OBD, ODB, est plus petite que deux angles droits (47).

Moins la somme des angles intérieurs diffère de deux angles droits, et plus les droites s'approcheront d'être parallèles; mais le parallélisme n'est rigoureux que lorsque cette différence est nulle.

54. (*Fig.* 10.) *Deux droites* MN, PQ, *parallèles à une troisième droite* RS, *sont parallèles entre elles*. En effet, soit menée la sécante ABCD, les droites MN, SR, étant parallèles, l'angle MAD sera égal à son correspondant RCD (52); à cause du parallélisme de PQ et de RS, l'angle PBD sera égal aussi à RCD; donc les deux angles correspondans MAD, PBD, sont égaux; donc les deux droites MN et PQ sont parallèles (51).

Lorsque la troisième droite est située entre les deux parallèles, la proposition est évidente d'elle-même.

55. (*Fig.* 11.) Pour mener des parallèles sur le papier, on fait glisser l'équerre ABC le long de la règle MN, en les tenant appliquées l'une contre l'autre; dans ce mouvement la droite AB fait toujours le même angle ABC avec la droite MN; elle est donc toujours parallèle à elle-même, et toutes les droites tracées le long de AB sont parallèles entre elles (54). La droite CA, dans ce mouvement, conserve aussi toujours son parallélisme, et fait toujours le même angle avec la règle; si l'équerre est juste, cet angle est droit. En général, quand on a une droite perpendiculaire, on peut, au moyen de l'équerre, se procurer tant d'autres perpendiculaires qu'on voudra, en menant des parallèles à la première perpendiculaire; mais celle-ci doit être tracée exactement par un procédé que nous indiquerous plus loin.

Angles des triangles.

56. Il suit de ce qui précède que trois droites situées dans un même plan, ou bien renferment un espace triangulaire ou ne peuvent fermer un espace; et, dans ce second cas, deux des droites sont parallèles ou les trois sont parallèles.

57. (*Fig.* 6.) Nous avons prouvé ci-dessus (46) que l'angle extérieur ACL est plus grand que chacun des angles intérieurs opposés A et ABC. Maintenant, à l'aide des propriétés des parallèles, nous pouvons démontrer que *l'angle extérieur est égal à la somme de ces deux an-*

gles. Conservons la même construction : nous avons vu que l'angle ACM est égal à l'angle A ; mais ces deux angles étant alternes-internes, les droites AB et CM sont parallèles (50); donc, par les propositions réciproques (52), les angles correspondans MCL, ABL, sont égaux ; l'angle extérieur ACL est donc égal à la somme des deux angles intérieurs opposés ABC et BAC ; et lorsque ces angles sont égaux, chacun est la moitié de l'angle extérieur.

58. (*Fig.* 6.) La somme des trois angles A, B, C du triangle ABC est donc égale à l'angle extérieur ACL, plus l'angle adjacent ACB ; mais ces deux angles valent ensemble deux angles droits ; donc *la somme des trois angles d'un triangle vaut deux angles droits*. C'est une proposition fondamentale dont on fait sans cesse usage ; elle est fondée sur les propositions du n° (52), et en est une conséquence immédiate ; si l'on parvient à prouver cette conséquence, indépendamment de ces propositions, alors elle peut servir à les démontrer.

Moins la somme de deux angles du triangle diffère des deux angles droits, et plus le troisième angle sera petit ; plus cette différence diminue, et plus le troisième angle approche d'être nul. Lorsque la différence est nulle, les deux côtés du troisième angle deviennent parallèles (51) ; c'est dans ce sens que l'on dit que *deux parallèles font entre elles un angle nul ;* on voit que c'est l'expression d'une limite.

59. La somme des angles d'un triangle est donc indépendante des longueurs des côtés. Que ces côtés soient grands ou petits, cette somme est constamment égale à deux angles

droits; mais il existe entre ces côtés et ces angles des relations de grandeur que nous allons faire connaître.

60. (*Fig.* 12.) Soient deux triangles ABC, DEF, ayant les côtés égaux chacun à chacun, savoir : AB=DE, BC=EF, AC=DF, les deux triangles sont égaux. En effet, plaçons le second triangle sur le premier, le côté DF sur son égal AC, D sur A et F sur C; admettons que le point E puisse ne pas tomber sur B, mais en E′ à droite du point B; menons la droite BE′ et au milieu I les deux droites AI et CI, AE′ étant la même ligne que DE égale à AB, le triangle BAE′ est donc isoscèle, et la droite AI est perpendiculaire sur BE′ (45). Par les mêmes raisonnemens on démontre que la droite CI doit aussi être perpendiculaire sur BE; il s'ensuivrait que par le même point I on pourrait élever deux perpendiculaires sur une droite, ce qui est impossible (27). La même impossibilité se présente si on suppose que le point E puisse tomber à gauche de B ou dans l'intérieur du triangle ABC; donc ce point tombera sur B, et par conséquent l'angle F est égal à l'angle C, l'angle D à l'angle A, et l'angle E à l'angle B.

61. (*Fig.* 12.) Ainsi, *deux triangles qui ont les côtés égaux chacun à chacun ont aussi les angles égaux;* mais il est facile de se convaincre que la réciproque de cette proposition n'est pas vraie. Menons dans le triangle DEF la parallèle *gh*, l'angle *g* sera égal à l'angle D, et l'angle *h* à l'angle F (52); les deux triangles *gEf*, DEF ont donc un angle commun et deux angles égaux; et toutefois leurs côtés ne sont pas égaux; mais il existe

alors, en comparant respectivement ces côtés, des relations de grandeur que nous ferons connaître plus loin.

62. Il suit de tout ce qui précède que des six choses qui entrent dans un triangle il suffit d'en connaître trois, savoir :

1° Deux côtés et l'angle compris (38);

2° Un côté et les deux angles adjacens (42);

3° Trois côtés (60);

pour que les trois autres choses soient aussi déterminées.

Ces trois propositions renferment les trois *caractères d'égalité* des triangles, et les principes des propriétés de toutes les autres figures; on les invoque sans cesse en géométrie; il est très-important de se familiariser avec leur usage.

63. (*Fig.* 13.) Dans le triangle BAC, le côté BC étant plus grand que le côté AB, l'angle BAC opposé au grand côté est plus grand que l'angle C opposé au petit côté. En effet, soit pris BD égal à BA et menée la droite AD, le triangle BAD étant isoscèle, l'angle BAD est égal à l'angle BDA (40). Or, l'angle BAC est plus grand que l'angle BAD, donc il est aussi plus grand que l'angle BDA; mais celui-ci comme *angle extérieur* est plus grand que l'angle C (46), donc l'angle A est plus grand que l'angle C; et en général, *dans un triangle, le plus grand angle est opposé au plus grand côté.*

64. (*Fig.* 13.) Et réciproquement, *dans tout triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle.* Soit BAC > BCA; alors on a aussi BC > BA; car si l'on avait BC < BA ou égal à BA, on aurait BAC plus petit ou égal à

BCA; ce qui est contraire à la supposition.

65. On nomme triangle *obtusangle* un triangle qui a un angle obtus, et il ne peut avoir plus d'un angle obtus (46); dans tout triangle obtusangle, le plus grand côté est celui qui est opposé à l'angle obtus (64).

66. On nomme triangle *rectangle* un triangle ABD dont un des angles B est droit (*fig.* 16); *dans tout triangle rectangle le plus grand côté est opposé à l'angle droit.*

67. On nomme triangle *acutangle* le triangle qui, n'ayant ni angle droit ni angle obtus, a ses trois angles aigus; le plus grand côté est opposé au plus grand des trois angles aigus.

68. Pour démontrer la proposition réciproque précédente (64), nous avons fait usage d'une *méthode d'argumentation* à laquelle il faut faire une attention particulière, parce qu'elle se présente très-souvent dans les raisonnemens géométriques; cette méthode est fondée sur ce principe : entre deux quantités de même espèce ne peut exister que l'une de ces trois relations de grandeur :

1° La première est égale à la seconde;

2° La première est plus grande que la seconde;

3° La première est plus petite que la seconde.

Lorsqu'on réussit à prouver par les propriétés des quantités comparées que deux de ces relations sont impossibles, on en conclut l'existence de la troisième relation. Ainsi dans le raisonnement ci-dessus (64), on a prouvé que ni la première ni la troisième relation ne pou-

vaient exister, d'où l'on a conclu l'existence de la deuxième relation.

69. (*Fig.* 14.) *Dans tout triangle* ABC, *la somme des deux côtés* AB *et* BC *est plus grande que le troisième côté* AC ; soit prolongé AB d'une longueur BD égale à BC, le triangle BCD étant isoscèle, l'on a l'angle D égal à l'angle BCD (40). Ainsi, l'angle ACD, plus grand que l'angle BCD, sera aussi plus grand que l'angle D ; donc, dans le triangle ACD le côté AD opposé à l'angle ACD est plus grand que le côté AC ; mais le côté AD est égal à la somme des deux côtés AB et BC ; donc, etc. On conclut aussi de là que *dans tout triangle un côté est plus grand que la différence des deux autres côtés.*

Ainsi, pour aller du point A au pont C, le chemin droit AC est plus court que le chemin brisé ABC.

70. (*Fig.* 15.) *Dans les deux triangles* ABC, DEF, si l'on a BC=DF, BA=DE *et l'angle* ABC > *que l'angle* EDF, le côté AC *sera aussi plus grand que le côté* EF. Soit placé le triangle DEF sur le triangle ABC, DF sur son égal BC, et soit menée la droite AE′, le triangle ABE′ étant isoscèle, on a l'angle BAE′ égal à l'angle BE′A ; mais AE′C est plus grand que AE′B, donc aussi AE′C est plus grand que l'angle E′AC ; et par conséquent dans le triangle E′AC le côté AC est plus grand que le côté E′C égal à EF ; (64), si le point E tombe dans l'intérieur du triangle comme dans la *fig.* 15 *bis*, alors le triangle ABE′ étant isoscèle, l'angle BE′A est nécessairement aigu (47) ; donc l'angle

AE'C est obtus (30), et par conséquent AC est plus grand que E'C.

Triangle rectangle; perpendiculaire, oblique; distance d'un point à une droite.

71. (*Fig.* 16.) On a donné aux trois côtés du triangle rectangle divers noms fréquemment employés, et qu'il est nécessaire de connaître. On nomme *hauteur* le côté AB opposé à un angle aigu, et alors BC, le côté opposé à l'autre angle aigu, se nomme *la base*, et si l'on prend BC pour hauteur, c'est AB qui porte le nom de *base;* et on donne le nom d'*hypothénuse* au côté AC opposé à l'angle droit; ainsi la proposition 66 peut s'énoncer ainsi : *dans tout triangle rectangle, l'hypothénuse est plus longue que la base ou que la hauteur.*

72. Quelquefois on donne le nom de *ligne oblique*, ou simplement *d'oblique*, à l'hypothénuse AC; alors AC prend le nom de *distance perpendiculaire* ou de *perpendiculaire*, et BC celui d'*écartement*. La proposition 66 s'énonce donc encore ainsi : *l'oblique est plus longue que la perpendiculaire et que son écartement.*

73. D'un point A on peut mener une infinité de droites à la droite GDBEC; la plus courte de ces droites est donc la perpendiculaire AB, ou, en d'autres termes, *le plus court chemin pour aller d'un point à une droite, c'est la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite.* On donne aussi le nom de *distance* à ce chemin *minimum.*

74. (*Fig.* 16.) Deux obliques AE, AC,

situées d'un même côté de la perpendiculaire sont inégales, car l'angle AEB étant aigu (46), son adjacent AEC est obtus; donc la droite AC est plus longue que AE (64); ainsi, *des deux obliques situées d'un même côté de la perpendiculaire, la plus écartée est la plus longue.*

Il est donc impossible *de mener du même point* A *deux obliques égales du même côté de la perpendiculaire. D'un même point il est aussi impossible de mener trois obliques égales à une droite* : car deux de ces obliques sont nécessairement du même côté de la perpendiculaire.

75. *Si l'écartement* BD *est égal à l'écartement* BC, *les deux obliques* AD, AC, *situées des deux côtés de la perpendiculaire sont égales*, car les deux triangles ABC, ABD, ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, sont égaux.

76. Et réciproquement, *deux obliques égales sont également écartées de la perpendiculaire*; car lorsque AD est égal à AC, le triangle ADC étant isoscèle, la perpendiculaire abaissée du sommet A divise la base BC en deux parties égales; donc BD est égal à BC. Cette proposition peut encore se démontrer ainsi : si BD n'était pas égal à BC, faisant tourner le triangle ABD autour de AB, le point D tombera quelque part en BC ou sur son prolongement, et par conséquent AD serait plus court ou plus long que AC, ce qui est contraire à la supposition.

77. Tous les points I, I', I'' de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite

DC sont donc également éloignés des extrémités de cette droite.

78. Un point tel que O, situé hors de cette perpendiculaire, est inégalement éloigné des deux extrémités D et C; car, CO prolongé rencontre nécessairement le perpendiculaire en A, et le triangle ADC étant isoscèle, l'angle ADC est égal à l'angle ACD. Or, l'angle ODC est plus petit que l'angle ADC, par conséquent plus petit que l'angle OCD; donc dans le triangle DOC, le côté OD opposé à l'angle C est plus grand que OC opposé à l'angle ODC (63).

Ceci peut encore se prouver ainsi :

On a $OD + AO > AD$ (69),

ou bien $OD + AO > AC$.

Par conséquent

$$OD > AC - AO \text{ ou } OD > OC.$$

79. *Tous les points, tels que* I, I', I'', *également éloignés des extrémités* B *et* C *de la droite* CD, *sont situés sur une même droite, perpendiculaire sur le milieu* B *de cette droite;* car tout point hors de cette perpendiculaire est inégalement éloigné des deux extrémités, etc.; c'est la réciproque de la proposition (77).

80. *L'oblique* AD, *plus longue que l'oblique* AE, *est plus écartée de la perpendiculaire;* car en faisant tourner le triangle ABE autour de AB, la ligne BE prendra la direction de BD, et AE, moins long que BD, tombera nécessairement entre AD et la perpendiculaire AB; donc l'écartement BE est plus petit que l'écartement BD.

81. (*Fig.* 16.) La proposition 76 peut encore s'énoncer ainsi : *deux triangles rectangles*

qui ont un côté AB *commun et des hypothénuses* AD, AC, *égales, sont égaux, ou bien deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont des hypothénuses égales et un côté de l'angle droit égal chacun à chacun*, car on pourra toujours placer ces triangles de manière à avoir un côté en commun.

82. (*Fig.* 16.) *Dans tout triangle rectangle* ABD, *le milieu* N *de l'hypothénuse est également éloigné des trois sommets* A, B, D; en effet, soit menée la droite BN, elle sera égale à DN; si elle était plus petite, l'angle D serait plus petit que l'angle NBD (63), et par la même raison l'angle NAB serait plus petit que l'angle ABN; donc la somme des deux angles aigus du triangle rectangle serait plus petite que l'angle droit ABD, ce qui est impossible. On démontre de même que BN ne saurait être plus grand que DN; donc, etc. Nous démontrerons plus bas que pour chaque triangle il existe un point également éloigné de ses trois sommets.

Quadrilatère, parallélogramme.

83. (*Fig.* 17.) On appelle *quadrilatère*, l'espace fermé ABCD, que forment en se coupant les quatre droites MBCN, PBAQ, TADV, SDCR; cette figure a quatre angles intérieurs BAD, ADC, DCB, CBA, et des angles extérieurs DCN, ADS, etc., formés par un côté et le prolongement d'un côté adjacent. Dans la *fig.* 17, les côtés opposés AB, CD, se coupent sur leurs prolongemens en I; il en est de même des côtés BC et AD, tandis que dans le quadrilatère de la *fig.* 17 *bis*,

l'intersection des côtés opposés CD, AB, tombe sur le côté AB, entre A et B. On donne l'épithète de *convexe* au quadrilatère de la première forme, et celle de *concave* au quadrilatère de la seconde forme; le quadrilatère convexe n'a que des angles *saillans*, et le quadrilatère concave a un angle *rentrant*. ADC plus grand que deux angles droits, quatre droites BC, CA, AD, DB (*fig.* 17) forment aussi un quadrilatère convexe.

Il y a une troisième forme; savoir le quadrilatère formé par les côtés AB, BD, DC, CA. (*Fig.* 17.)

84. (*Fig.* 17 et 17 *bis.*) On appelle *diagonale* la droite BD qui joint deux sommets opposés d'un quadrilatère; dans tout quadrilatère, on peut mener deux diagonales BD et AC.

85. (*Fig* 17 *bis.*) *Dans le quadrilatère rentrant, la somme des deux côtés enveloppant* AB *et* BC, *est plus grande que la somme des côtés enveloppés* AD *et* DC, et l'angle ADC est plus grand que l'angle ABC; en effet, soit prolongé CD jusqu'en I, l'on a

$$AI + ID > AD,$$

et par conséquent $AI + ID + CD > AD + CD$,

ou $$AI + IC > AD + CD,$$

on démontrerait de même que

$$AB + BC > AI + IC,$$

donc $$AB + BC > AD + CD.$$

L'angle extérieur ADC est plus grand que l'intérieur opposé AID, et ce dernier angle est par la même raison plus grand que l'angle IBC; donc ADC est plus grand que l'angle ABC; plus le point B s'éloigne de D, plus

l'angle B devient petit, et plus les côtés AB, BC, approchent d'être parallèles (58) : c'est dans ce sens que l'on dit que deux droites parallèles se rencontrent à l'infini.

86. La somme des quatre angles intérieurs d'un quadrilatère est égale à quatre angles droits ; en effet, la diagonale BD décompose le quadrilatère en deux triangles, renfermant six angles, dont la somme est égale à quatre angles droits ; mais ces six angles sont égaux aux quatre angles du quadrilatère ; donc, etc. (*fig.* 17).

Dans le quadrilatère concave (17 *bis*) l'angle intérieur ADC est plus grand que deux angles droits.

87. Les quatre angles intérieurs, pris avec leurs adjacens extérieurs, valent ensemble huit angles droits ; or, les angles intérieurs valant quatre angles droits (81), donc les angles extérieurs DCN, ADS, BAT, PBC, valent aussi quatre angles droits.

88. (*Fig.* 17.) Il suit de ce qui précède :

1° Un quadrilatère ne peut avoir ses quatre angles tous aigus ou tous obtus ;

2° Un quadrilatère dont la somme de deux angles est égale à deux angles droits, a aussi la somme des deux autres angles égale à deux angles droits ; par exemple, si l'angle intérieur A, plus l'angle intérieur opposé C, font ensemble deux angles droits, la somme des deux angles B et D vaudra aussi deux angles droits. Si les deux angles B et A, situés du même côté, valent ensemble deux angles droits, les côtés AD et BC sont parallèles (51), et le quadrilatère prend le nom de *trapèze* (*Voir fig.* 18) ; AB et CD ne sont pas parallèles.

Il est facile de démontrer que dans tout quadrilatère la somme des quatre côtés est comprise entre la somme des diagonales et le double de cette somme.

89. (*Fig.* 19.) Un *parallélogramme* ABCD est un quadrilatère dont les côtés opposés AB et CD, BC et AD sont parallèles.

90. *La diagonale* BD *divise un parallélogramme en deux triangles égaux*; en effet, à cause des parallèles BC, AD, les angles alternes-internes DBC, BDA sont égaux; il en est de même des angles ABD, BDC; donc les deux triangles BDC, ABD ayant un côté BD en commun, et deux angles adjacens égaux, sont égaux; par conséquent, dans tout parallélogramme, 1° les côtés opposés BC et AD; ou AB, CD sont égaux; 2° les angles opposés A, C sont égaux. Cette proposition s'énonce quelquefois ainsi: *les parallèles interceptées entre parallèles, sont égales.*

91. Réciproquement, *un quadrilatère* ABCD *qui a les côtés opposés égaux, est un parallélogramme*, car les deux triangles ABD, CBD, ayant alors les trois côtés égaux chacun à chacun, sont égaux; les angles alternes-internes DBC, BDA, étant égaux, les côtés AD et BC sont parallèles; il en est de même de AB et CD.

92. Un quadrilatère qui a les angles opposés égaux, est un parallélogramme; les quatre angles valant ensemble quatre angles droits, il suit de l'égalité admise, que les deux angles situés d'un même côté, vaudront ensemble deux angles droits; donc, etc.

93. (*Fig.* 20.) Un parallélogramme ne peut avoir un angle droit, sans que les trois autres

angles ne soient droits ; dans ce cas, on le nomme *parallélogramme rectangle*, ou simplement *un rectangle ;* les côtés BA, CD, du rectangle sont les plus courtes lignes qu'on puisse mener entre les parallèles ; on les nomme les *distances* entre les parallèles : c'est dans ce sens qu'on dit que des *parallèles sont partout également distantes.*

94. (*Fig.* 21.) Un parallélogramme ne peut avoir deux côtés adjacens égaux, sans avoir ses quatre côtés égaux entre eux, alors on le nomme *losange.*

95. (*Fig.* 22.) Un *carré* est un losange rectangle ; les quatre côtés et les quatre angles sont égaux.

96. (*Fig.* 19.) *Les deux diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales ;* en effet, le triangle BOC est égal au triangle AOD, car BC est égal à AD, et les deux angles adjacens à BC sont égaux aux deux angles adjacens à AD (52), donc BO = OD et AO = OC ; et réciproquement, lorsque *deux diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales, la figure est un parallélogramme.*

97. (*Fig.* 20.) Dans le rectangle, le point d'intersection O est à égale distance des quatre sommets du rectangle ; et la réciproque a également lieu.

(*Fig.* 21.) Dans le losange, les triangles adjacens AOD, AOB, ayant les côtés égaux chacun à chacun, sont égaux, et par conséquent l'angle AOD est égal à son adjacent AOB ; et les deux diagonales se coupent à angles droits ; la réciproque a lieu.

(*Fig.* 22.) Dans le carré, les diagonales se coupent à angles droits, et leur point d'intersection est à égale distance des quatre sommets du carré ; la réciproque a lieu.

98. **Deux** droites perpendiculaires, respectivement aux côtés d'un angle, ne peuvent être parallèles, et ont toujours un point d'intersection ; car, si elles étaient parallèles, les côtés de l'angle étant perpendiculaires à ces parallèles, seraient aussi parallèles ou dans la même direction, ce qui est absurde.

Les deux perpendiculaires prolongées forment ensemble quatre angles égaux respectivement à ceux qui sont formés par les côtés prolongés de l'angle donné.

Polygones.

99. **Nous** avons examiné jusqu'ici des figures formées par trois lignes droites, le triangle ; par quatre lignes droites, le quadrilatère ; nous allons maintenant considérer des figures formées par tant de lignes droites qu'on voudra, ou les *polygones :* on donne en général ce nom à des surfaces planes fermées de toute part par des lignes droites. Pour distinguer l'espèce du polygone, on énonce le nombre des côtés ; ainsi on dit polygone de trente côtés, de quarante côtés, etc. ; toutefois, certains polygones ont des noms particuliers qu'il faut connaître ; en voici la nomenclature :

Polygone de 3 côtés se nomme triangle et quelquefois. . . . . trilatère.

Polygone de 4. . . . . . quadrilatère.
Polygone de 5. . . . . . pentagone.
Polygone de 6. . . . . . hexagone.
Polygone de 7. . . . . . heptagone.
Polygone de 8. . . . . . octogone.
Polygone de 9. . . . . . ennéagone.
Polygone de 10. . . . . . décagone.
Polygone de 11. . . . . . endécagone.
Polygone de 12. . . . . . dodécagone.
Polygone de 15. . . . . . pentédécagone.

Dans ce qui suit, nous n'éxaminerons que les polygones convexes, c'est-à-dire qui n'ont pas d'angles rentrans (83).

Dans un polygone convexe un côté quelconque étant prolongé laisse tous les sommets du même côté.

100. (*Fig.* 23.) On nomme *diagonale du polygone,* une droite qui va du sommet d'un angle à un sommet non voisin; dans l'hexagone ABCDEF, les droites AC, AD, AF sont des diagonales; de chaque sommet on peut mener trois diagonales: donc dans l'hexagone on peut mener $\frac{6.3}{2}$ ou 9 diagonales; dans l'heptagone on peut en mener $\frac{7.4}{2} = 14$, et en général dans un polygone d'un nombre n de côtés, on peut mener $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

101. (*Fig.* 23.) *La somme des angles intérieurs d'un polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il a de côté, moins deux.*

Soit l'hexagone ABCDEF ; on peut le décomposer en quatre triangles ABC, ADC, ADE, AEF, dont les douze angles valent, pris ensemble, huit angles droits; or, ces douze angles forment les six angles du polygone, donc dans l'hexagone la somme des angles intérieurs vaut huit angles droits, ou $6 - 2$ fois deux angles droits. Il est aisé de voir que dans l'heptagone on formerait ainsi 5 triangles, et par conséquent la somme des angles est égale à $7 - 2$ fois ou à 5 fois deux angles droits, à 10 angles droits; et, en général, dans un polygone d'un nombre n de côtés, la somme des angles est égale à $n - 2$ fois deux angles droits ou à $2n - 4$ angles droits. Ainsi, un hexagone ne peut avoir tous ses angles à la fois plus petits ou plus grands que $\frac{8}{6}$ ou $\frac{4}{3}$ d'angle droit; l'heptagone ne saurait avoir tous ses angles à la fois plus petits ou plus grands que $\frac{10}{7}$ d'angle droit; et, en général, un polygone de n côtés ne peut avoir chacun de ses angles plus petit ou plus grand que $\frac{2n-4}{n}$ d'angle droit.

102. On nomme *polygone équiangle* celui dont tous les angles sont égaux : ainsi le triangle équilatéral, le quadrilatère rectangle, offrent l'exemple de polygones équiangles; dans le polygone équiangle d'un nombre n de côtés, chaque angle est donc égal à $\frac{2n-4}{n}$ d'angle droit. A l'aide de cette formule, on a calculé le tableau qui suit :

	Valeur de l'angle intérieur en parties d'angle droit.	en parties circulaires.
Triangle équiangle ou équilatéral	$\frac{2}{3}$	60°.
Quadrilatère rectangle. .	1	90°.
Pentagone équiangle. . .	$1\frac{1}{5}$	108°.
Hexagone, *id*.	$1\frac{1}{3}$	120°.
Heptagone, *id*	$1\frac{3}{7}$	228° 34′ 17″ $\frac{2}{7}$.
Octogone, *id*.	$1\frac{1}{2}$	135°.
Ennéagone, *id*	$1\frac{5}{9}$	140°.
Décagone, *id*.	$1\frac{3}{5}$	144°.
Endécagone.	$1\frac{7}{11}$	147° 16′ 21″ $\frac{9}{11}$.
Dodécagone, *id*.	$1\frac{2}{3}$	150°.

(Voir pour la seconde colonne n° 154.)

On voit que la grandeur de l'angle intérieur augmente avec le nombre des côtés, elle approche de plus en plus d'être égale à deux angles droits, mais ne peut jamais atteindre cette valeur; ainsi, deux angles droits sont une *limite* vers laquelle tend l'angle intérieur des polygones équiangles, elle peut en différer moins qu'aucune quantité donnée; c'est ce qu'on peut conclure directement de l'expression générale de cet angle; en effet,

$$\frac{2n-4}{n}=2-\frac{4}{n}.$$

Or, à mesure que n augmente, la partie soustractive $\frac{4}{n}$ diminue, et par conséquent l'angle diffère de moins en moins de deux angles droits.

103. (*Fig.* 23.) Dans l'hexagone ABCDEF, en ajoutant chaque angle intérieur, tel que FAB

avec son adjacent extérieur BAO, on obtient douze angles dont la somme vaut évidemment douze angles droits; or, la somme des six angles intérieurs vaut huit angles droits (101) : donc la somme des six angles extérieurs vaut quatre angles droits.

En faisant le même calcul pour un autre polygone, on trouvera encore que la somme des angles extérieurs ne dépend pas du nombre des côtés, et est constamment égale à quatre angles droits; soit n le nombre des côtés; les angles intérieurs, plus les angles extérieurs adjacens, valent $2n$ angles droits; or, les angles intérieurs, pris ensemble, valent $2n-4$ angles droits; il faut donc que les angles extérieurs fassent ensemble quatre angles droits.

104. (*Fig.* 23.) Supposons qu'ayant fixé l'extrémité d'un fil en A, on l'enveloppe autour du polygone. La première direction étant suivant ABP; il change de direction en B pour s'appliquer sur le côté BC, et ce changement de direction est mesuré par l'angle extérieur PBC. En C, il y a un nouveau changement de direction, indiqué par l'angle QCD; et quand le fil sera de nouveau en AB, il aura changé six fois de direction. Quel que soit le nombre des côtés du polygone, la somme de tous les changemens de direction sera constamment la même, et égale à quatre angles droits; il en est de même si un mobile parcourt les côtés du polygone; quand il reviendra derechef au même côté, tous les changemens de direction équivaudront à quatre angles droits.

105. On nomme *périmètre* d'un polygone une droite équivalente en longueur au *contour* ou à la somme de tous les côtés du po-

lygone; ainsi, un fil enveloppé autour d'un polygone, étant développé en ligne droite, donne le périmètre du polygone; lorsque l'unité de mesure est le mètre, le périmètre s'exprime en unités métriques Quoique les deux mots *contour* et *périmètre* n'expriment pas la même idée, puisque l'un est la mesure de l'autre, l'usage les a rendus synonymes.

106. Il est facile de démontrer que, 1° dans tout polygone, chaque côté est plus petit que la somme de tous les autres côtés; 2° que lorsqu'un polygone enveloppe de toute part un autre polygone, le périmètre du polygone enveloppant est plus grand que le périmètre du polygone enveloppé (85); 3° le périmètre est plus grand que le double d'une diagonale.

107. (*Fig.* 24.) On nomme *ligne brisée* une portion de polygone ABCD, composée de lignes droites; lorsque deux *lignes brisées* sont telles que ABCD, AEFD, dont l'une enveloppe l'autre, l'extérieure est plus longue que l'intérieure, et chacune est plus longue que la droite AD; par conséquent, *la droite qui réunit deux points est plus courte que toute ligne brisée qui aboutit à ces mêmes points.*

Lignes courbes, circonférence.

108. On nomme *ligne courbe* ou simplement une *courbe*, toute ligne qui n'est ni droite, ni composée de lignes droites; de sorte qu'en réunissant par une droite deux points quelconques d'une courbe, cette droite ne peut faire partie de la courbe. Le seul mouvement imprimé par la main peut faire tracer à la plume des courbes dont les formes varient à l'infini; il existe donc une infinité

de courbes diverses : nous n'examinerons d'abord que les courbes décrites *sur un même plan*; et, parmi celles-ci, la plus simple de toutes, ou la circonférence.

109. (*Fig.* 25.) On donne le nom de *circonférence* à une ligne plane ABCDE, dont tous les points sont également éloignés d'un même point O appelé *centre*; on décrit la circonférence à l'aide du *compas*, instrument connu; l'extrémité d'une branche étant posée en O, l'extrémité de l'autre branche décrit, en tournant, la circonférence.

110. (*Fig.* 25.) Les *rayons* OA, OB, etc., sont des droites qui vont du centre à la circonférence; il est évident que *tous les rayons sont égaux entre eux*.

111. On ne peut trouver, sur une circonférence, trois points en ligne droite; car du centre on pourrait mener à cette droite trois rayons égaux, ce qui est impossible (74); donc *la circonférence est une ligne courbe* (108), et une droite ne peut la rencontrer en plus de deux points.

112. Le *cercle* est l'étendue superficielle renfermée par la circonférence; ainsi celle-ci est une ligne, et celui-là une surface : cependant l'usage s'est introduit de dire quelquefois cercle au lieu de circonférence du cercle.

113. (*Fig.* 25.) Le *diamètre* est une droite AOK, passant par le centre et terminée de part et d'autre à la circonférence; un diamètre étant formé par deux rayons, il s'ensuit que *tous les diamètres sont égaux* (110).

114. (*Fig.* 25.) La *corde* AB est une droite qui réunit deux points de la circonfé-

rence; la corde AB étant plus courte que la somme des deux rayons OA, OB, qui aboutissent à ses extrémités, il s'ensuit que *toute corde est plus petite qu'un diamètre* (113); or, le diamètre étant une corde passant par le centre, il s'ensuit que le diamètre est la plus grande des cordes qu'on puisse mener dans une circonférence; les deux points A et K, extrémités d'un diamètre, sont dits *diamétralement opposés.*

115. (*Fig.* 25.) D'un point I, pris dans l'intérieur du cercle, le plus court chemin pour aller à la circonférence est IA, et le plus long est IK, sur le diamètre qui passe sur le point I; en effet, soit IB une droite quelconque, on aura

$$OI + OB > IB;$$

or $$OI + OB = OI + OK = IK,$$

donc $$IB < IK;$$

de même $$OI + IB > OB;$$

or $$OB = OA = OI + AI,$$

d'où $$OI + IB > OI + AI,$$

donc $$IB > AI.$$

116. (*Fig.* 25.) *Le diamètre* AK *partage la circonférence et le cercle en deux parties égales;* car en pliant la figure de manière que le pli se fasse suivant le diamètre AK, tous les points de la partie ABK tomberont sur les points de la partie AEK; sans cela, la circonférence aurait des points inégalement éloignés du centre, ce qui est contraire à la définition de cette ligne (109); ABK, ALK, étant chacune la moitié de la circonférence, on leur a donné le nom de *demi-circonférences.*

117. (*Fig.* 25.) Une portion AMB de la

circonférence se nomme *arc*, mot emprunté à l'arme de jet de ce nom; ce qui a donné lieu aussi à la dénomination de corde (114); on dit que la corde AB tend, ou, ce qui est usité en géométrie, *sous-tend* l'arc; quelquefois on dit la *sous-tendante* pour la corde. On voit qu'une même corde AB sous-tend à la fois deux arcs : un arc AMB, plus petit qu'une demi-circonférence, et un arc ALKCB plus grand qu'une demi-circonférence.

118. Deux arcs AMB, ANE sont égaux, lorsque étant appliqués l'un sur l'autre ils se recouvrent; *deux arcs égaux* AMB, ANE *sont sous-tendus par des cordes égales;* car en posant un arc sur l'autre, ils ont mêmes extrémités, qui sont aussi celles des cordes.

119. *Réciproque. Les cordes égales* AE, AB, *sous-tendent des arcs égaux de même espèce, tous deux plus petits on tous deux plus grands que la demi-circonférence;* menant les rayons OB, OE, les deux triangles AOE, AOB, ayant les trois côtés égaux, sont égaux; pliant la figure suivant le diamètre AK, jusqu'à ce que la demi-circonférence AMBK recouvre l'autre demi-circonférence, le triangle AOB couvrira son égal AOE, le point B sera sur le point E, et tous les points de l'arc AMB seront placés sur ceux de l'arc ANE, par conséquent ils sont égaux : la démonstration reste la même lorsque les deux cordes égales n'ont pas une extrémité A en commun.

120. *Deux angles égaux* AOE, AOB, *ayant leurs sommets au centre* O, *interceptent sur la circonférence des arcs* ANE, AMB *égaux;* car les triangles AOE, AOB, sont égaux, ayant un angle égal compris entre côtés égaux;

donc les côtés ou cordes AE et AB sont égales, et les arcs sous-tendus seront égaux (119).

121. *Réciproque. Les arcs égaux répondent à des angles au centre égaux*, car alors les cordes sont égales (118); et les triangles ayant les trois côtés égaux sont égaux.

122. *L'arc* AEL *étant plus grand que l'arc* AE, *et tous deux plus petits que la demi-circonférence, la corde* AL *est plus longue que la corde* AE; car menant les rayons OA, OE, OL, l'angle AOL étant plus grand que l'angle AOE, les deux triangles AOL, AOB, ont deux côtés égaux chacun à chacun, et les angles compris inégaux; donc le côté AL est plus grand que le côté AE (70). Si les deux arcs sont tous deux plus grands que la demi-circonférence, l'arc le plus grand est sous-tendu par la plus petite corde; la proposition cesse d'avoir lieu si l'un des arcs est plus petit et l'autre plus grand que la demi-circonférence.

Et *réciproquement* de deux cordes inégales, la plus longue sous-tend le plus grand arc.

123. Le milieu M du petit arc AB, le milieu P de la corde, le centre O, le milieu D du grand arc ADB, sont quatre points situés sur un même diamètre perpendiculaire à la corde; car l'arc AM étant égal à l'arc MB, les cordes AM et MB sont égales (118); le point M est donc également éloigné des deux points A et B; il en est de même du point D; donc les quatre points étant également éloignés des extrémités de la corde AB, sont situés sur une même droite; donc, etc.

Il suffit ainsi de connaître deux de ces points pour avoir la direction de la droite

sur laquelle se trouvent les deux autres points. Et il suit de là que *toutes les cordes parallèles ont leurs points milieux situés sur un même diamètre perpendiculaire à ces cordes, et toute perpendiculaire sur le milieu d'une corde est un diamètre.*

124. Les deux cordes AB, AE, étant égales, si on abaisse les perpendiculaires OP, OQ, on aura deux triangles rectangles AOP et AOQ qui sont égaux; car AQ, moitié de AE, est égal à AP moitié de AB, et l'hypoténuse AO est commune (81); donc OQ=OP; ainsi le centre est également distant des cordes égales (73). Cette proposition s'énonce ordinairement de cette manière : *les cordes égales sont également distantes du centre.*

125. *Deux cordes également distantes du centre sont égales;* car alors on a OP=OQ; les deux triangles rectangles sont donc égaux (81), et par conséquent AP, moitié de AB, est égal à AQ moitié de AE; donc AB=AE.

126. (*Fig.* 25.) La perpendiculaire OQ sur AE est une oblique à l'égard de la corde plus longue AL; soit R le point d'intersection, pied de l'oblique OR; or OQ est plus grand que OR, et l'oblique OR est plus longue que la perpendiculaire qu'on abaisserait de O sur AL; donc le centre est plus près de la grande corde AL que de la moindre AE. Ainsi, *de deux cordes inégales, la plus petite est la plus éloignée du centre, et réciproquement de deux cordes inégalement distantes du centre, la plus éloignée est la plus courte.*

De là on conclut que de toutes les cordes qui passent par un point situé dans l'intérieur

du cercle, la plus courte est celle qui est perpendiculaire au diamètre.

Observation. Nous ne démontrerons plus les réciproques, lorsque, comme dans le cas actuel, elles sont des conséquences immédiates des propositions directes.

127. *Une droite* SDV *perpendiculaire en* D *à l'extrémité d'un rayon* OD, *n'a que ce point en commun avec la circonférence;* car tout autre point T, pris sur cette droite, est plus éloigné du centre que le point D (72), il est donc hors de la circonférence. *Une droite qui, passant par l'extrémité d'un rayon, ne lui est pas perpendiculaire, entre dans la circonférence, et étant suffisamment prolongée, la coupera en un second point;* car le rayon étant oblique à l'égard de la droite, si du centre on abaisse une perpendiculaire sur cette droite, elle sera plus courte que le rayon (72), le pied de la perpendiculaire est donc plus près du centre que l'extrémité du rayon : la droite a donc un point dans l'intérieur du cercle; donc, etc. Par conséquent *toute droite qui n'a qu'un point de commun avec le cercle est nécessairement perpendiculaire au rayon qui passe ce point.*

128. On nomme *tangente* au cercle une droite SDV, qui n'a qu'un point de commun avec le cercle; et le point commun se nomme *point de contact.* On a donné aussi quelquefois à la tangente le nom de *touchante;* la perpendiculaire à la tangente élevée sur le point de contact se nomme aussi *normale*; ainsi, *dans le cercle, tous les rayons sont des lignes normales.*

On nomme *sécante* une droite qui a deux

points en commun avec le cercle ; on dit alors que la sécante coupe le cercle, et les points communs se nomment *points d'intersection.* Ainsi, une sécante est une corde prolongée.

Deux circonférences.

129. *Deux cercles de centres différens et de même rayon sont évidemment égaux ;* et les propositions 116 jusqu'à 125 sont aussi applicables à deux cercles égaux ; par exemple, deux arcs égaux dans deux cercles égaux sont sous-tendus par des cordes égales ; et ainsi des autres ; les moyens de démonstration restent les mêmes.

130. Les circonférences sont *concentriques*, lorsqu'elles sont décrites du même centre, avec des rayons différens ; il est évident que des circonférences concentriques ne peuvent avoir aucun point en commun.

131. (*Fig.* 26.) *Lorsque deux circonférences ont deux points en commun, la droite qui joint les deux centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde qui joint les points en commun ;* car les deux centres sont des points également éloignés des extrémités de cette corde (79).

132. *Deux circonférences ne peuvent se couper en plus de deux points ;* supposons qu'il y en ait trois ; en les réunissant par des droites, on aura trois cordes formant un triangle, et il faudra donc que la ligne des centres soit perpendiculaire à la fois sur les trois côtés de ce triangle (131), ce qui est absurde ; donc, etc.

133. (*Fig.* 26.) *Lorsque deux circonférences se coupent en deux points, la somme*

des deux rayons est plus grande que la distance des centres; car de chaque centre on peut mener un rayon à un même point d'intersection; les deux rayons et la distance des centres forment un triangle; donc, etc. (69); la droite qui joint les points d'intersection peut couper la ligne des centres entre les deux centres, ou bien les laisser du même côté.

134. (*Fig.* 27.) *Lorsque la somme des rayons est égale à la distance des centres, les circonférences n'ont qu'un seul point en commun, situé sur la ligne des centres et entre les deux centres;* car s'il y avait encore un point de commun, on pourrait former un triangle où la somme des deux côtés serait égale au troisième, ce qui est absurde; donc, etc.

(*Fig.* 27.) Dans ce cas, on dit que les deux cercles A et B se *touchent extérieurement;* le point de contact O est alors entre les deux centres A et B.

Lorsque la différence AC des deux rayons est égale à la distance des centres, on démontre de même que les cercles n'ont qu'un point O en commun, et les cercles se *touchent intérieurement.*

135. (*Fig.* 26.) Si le point K commun à deux circonférences n'est pas sur la ligne des centres AB, il existera encore un second point L commun aux deux circonférences; en effet, du point K situé hors de la ligne AB, on peut imaginer une perpendiculaire KI sur cette droite; cette perpendiculaire prolongée coupera, de nouveau, la circonférence A en un point L; or, comme l'on a KI=IL (123), on aura donc BL=BK; le point L appartient donc à la circonférence B; il est donc commun aux

deux circonférences ; par conséquent, *toutes les fois que deux circonférences se touchent ; le point de contact est nécessairement sur la ligne qui réunit les centres.*

136. (*Fig.* 27.) La tangente SOV, qui passe par le point de contact O, est commune à tous les cercles qui se touchent en O, et tous ces cercles ont leurs centres sur la même droite ACOB ; ainsi entre une circonférence et sa tangente, on peut mener une infinité d'autres circonférences ayant toutes la même tangente.

Plus les centres des cercles s'éloignent du point de contact, plus les circonférences se rapprochent de la tangente, et plus il est difficile de distinguer à l'endroit du contact, la tangente de sa circonférence ; de sorte que lorsque le rayon est très-grand, il faut avoir un grand arc pour que sa courbure devienne sensible. De deux circonférences, celle qui a le plus grand rayon a moins de courbure, est plus près de la rectitude que celle d'un rayon moindre. C'est ce qui a fait dire que *les courbures des circonférences sont en raison inverse des rayons.*

Un fil élastique devant être appliqué sur une circonférence, il faudra un effort d'autant plus grand, que le rayon sera plus petit.

137. Deux circonférences n'ont aucun point en commun, lorsque la distance des centres est plus grande que la somme des deux rayons, ou lorsque cette distance est plus petite que la différence des deux rayons ; dans le premier cas, les circonférences sont hors l'une de l'autre ; et dans le deuxième cas, une circonférence entoure l'autre.

138. Soit, pour résumer, R et *r* les deux

rayons, et D la distance de deux centres; on aura,
et $R > r$; le signe $>$ n'excluant pas l'égalité.

1° Si $R + r = D$, les deux circonférences se touchent extérieurement.

2° Si $R - r = D$, les deux circonférences se touchent intérieurement.

3° Si $R + r < D$, les deux circonférences sont hors l'une de l'autre.

4° Si $R - r > D$, les deux circonférences s'entourent l'une l'autre.

(Note 2.)

Mesure des angles rapportée au cercle.

139. (*Fig.* 28.) Deux diamètres perpendiculaires AOB, COD, divisent la circonférence et le cercle en quatre parties égales; car les quatre arcs AMC, CNB, BPD, DQA, sont sous-tendus par des cordes AC, CB, BD, DA, qui sont égales comme obliques, s'écartant également du pied O de la perpendiculaire; ainsi tout angle droit intercepte, entre ses côtés, le quart de la circonférence décrite avec un rayon quelconque du sommet comme centre.

Quelquefois on donne le nom de *cadran* au quart de la circonférence.

140. Nous avons vu (28) que tous les angles pouvaient être rapportés à l'angle droit. Or il existe le même rapport entre un angle quelconque BON et l'angle droit BOC, qu'entre les arcs BN, BNC, interceptés entre les côtés de ces angles et décrits du même rayon. En effet, soit d'abord l'angle BON contenu

un nombre entier de fois dans l'angle droit, par exemple, trois fois; les trois angles BON, NOR, ROC, étant égaux, les arcs interceptés BN, NR, RC, sont égaux (120.) BN est donc le tiers du cadran; donc l'angle BON est contenu dans l'angle droit autant de fois que l'arc BN est contenu dans le cadran; si le rapport entre les angles est exprimé par un nombre fractionnaire, le rapport entre les arcs est exprimé par le même nombre; soit, par exemple, l'angle BON les $\frac{4}{7}$ de l'angle droit; on peut concevoir l'angle BON et l'arc BN divisés en quatre parties égales; le quart d'angle sera contenu 7 fois dans l'angle droit; donc le quart d'arc sera aussi contenu 7 fois dans le cadran; donc l'arc entier sera les $\frac{4}{7}$ du cadran. Ce raisonnement ne dépend pas des propriétés des nombres 4 et 7 que l'on a choisis pour exemple; donc, en général, quel que soit le rapport numérique entre un angle et l'angle droit, ce même rapport existe entre les arcs décrits du sommet comme centre et du même rayon. On peut donc former une proportion entre les angles et leurs arcs; et dire, un angle est à l'angle droit, comme l'arc intercepté entre les côtés de l'angle est à celui qu'interceptent les côtés de l'angle droit, les deux arcs étant décrits des sommets comme centres et avec le même rayon.

141. Cette proportion existe lors même que les rapports ne sont pas susceptibles d'être exprimés par un nombre limité de chiffres. Si, par exemple, l'angle droit étant toujours l'unité, on avait un angle BON représenté par la moitié de la racine carrée de 2 ou $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; cette fraction est comprise en extrayant la racine carrée.

Entre $\frac{7}{10}$ et $\frac{8}{10}$.
Entre $\frac{70}{100}$ et $\frac{71}{100}$.
Entre $\frac{707}{1000}$ et $\frac{708}{1000}$.
Entre $\frac{7071}{10000}$ et $\frac{7072}{10000}$.

La différence entre les 1res limites est de $\frac{1}{10}$.
La différence entre les 2es limites est de $\frac{1}{100}$.
La différence entre les 3es limites est de $\frac{1}{1000}$.
La différence entre les 4es limites est de $\frac{1}{10000}$.

En continuant l'opération, on ne parviendra jamais à trouver *exactement* en nombre la valeur de la fraction; mais les limites entre lesquelles cette valeur se trouve différeront de moins en moins, et cette différence peut devenir plus petite qu'aucune quantité donnée; or, je dis que les mêmes limites qui renferment le rapport de l'angle BON à l'angle droit, renferment aussi le rapport de l'arc BN au cadran. En effet, soit BOK l'angle $\frac{7}{10}$ plus petit que BON, et BOI l'angle $\frac{8}{10}$ plus grand que BON, on aura BK plus petit, et l'arc BI plus grand que l'arc BN; donc cet arc est compris entre $\frac{7}{10}$ et $\frac{8}{10}$ du cadran, et il en est de même des autres limites plus rapprochées; par conséquent, les deux rapports incommensurables de l'angle BON et l'angle droit, ainsi que celui entre l'arc BN au cadran, sont renfermés entre les mêmes limites; la différence de ces deux rapports, si elle existe, doit être plus petite que la différence entre les limites : or, cette dernière différence peut devenir plus petite qu'aucune quantité donnée, donc la différence entre les deux rapports doit aussi être plus petite qu'aucune quantité assignable, ou autrement cette différence doit être nulle et les rapports être

égaux; donc la proportionnalité entre les angles et les arcs décrits du sommet comme centre existe, lors même que les rapports sont incommensurables. On voit que les mêmes raisonnemens et les mêmes conclusions subsistent, quelle que soit l'espèce d'incommensurabilité, qu'elle soit exprimée par des extractions de racines ou autrement.

142. On peut encore démontrer cette proportionnalité de cette manière :

Le rapport angulaire $\frac{BON}{BOC}$, s'il n'est pas égal au rapport circulaire $\frac{BN}{BC}$, sera ou plus grand ou plus petit; admettons la première hypothèse, et supposons $\frac{BON}{BOC}=\frac{BR}{BC}$ (A), où l'on a $BR>BN$.

Quelle que soit la petitesse de l'arc NR, on peut concevoir le cadran BC divisé en un nombre assez grand de parties égales, pour que chacune soit plus petite que l'arc NR; il tombera au moins un point de division I entre N et R; les arcs BI et BC comprenant un nombre commensurable déterminé de parties égales, on aura donc $\frac{BOI}{BOC}=\frac{BI}{BC}$ (140); combinant cette égalité avec celle de l'hypothèse (A), on en tire celle-ci $\frac{BON}{BOI}=\frac{BR}{BI}$ égalité impossible, car BON est plus petit que BOI, tandis que BR est plus grand que BI; donc la première hypothèse est impossible; on démontre de même l'impossibilité de la seconde hypo-

thèse ; donc le rapport angulaire est égal au rapport circulaire.

Nous prouvons ici l'égalité de deux quantités, en démontrant que l'admission de leur inégalité conduirait à une absurdité ; ce genre de preuves est connu en géométrie sous le nom de la *réduction à l'absurde*.

143. Nous nous sommes servi (141) de deux principes que nous invoquerons souvent, et que, par cette raison, nous devons plus particulièrement démontrer.

Premier principe. Lorsque deux quantités sont comprises entre les mêmes limites, la différence des deux quantités est toujours plus petite que celle des deux limites ; en effet, soient A et B les deux quantités, et L et L′ les deux limites ; rangeons ces quatre quantités par ordre de grandeur :

$$L,\ A,\ B,\ L',$$

ou

$$A > L,$$
$$B > A,$$
$$L' > B.$$

Nommons première différence celle qui existe entre A et L ou $A - L$.

Deuxième différence celle qui existe entre B et A ou $B - A$.

Troisième différence celle qui existe entre L′ et B ou $L' - B$.

Il est évident qu'en ajoutant la première différence à L on obtient A.

Qu'en ajoutant la deuxième différence à A on obtient B.

Qu'en ajoutant la troisième différence à B on obtient L′.

Donc aussi on obtient B en ajoutant à L les

deux premières différences, et l'on obtient L′ en ajoutant à L la somme des trois différences.

La différence entre L′ et L est donc égale à la somme des trois différences ; elle est donc plus grande que chacune d'elles.

On a

$$L' - L = A - L + [B - A] + L' - B.$$

Deuxième principe. Si deux quantités A et B sont comprises entre les mêmes limites, dont la différence peut devenir plus petite qu'aucune quantité assignable, les quantités A et B sont égales; en effet, si elles étaient inégales, l'excès assignable de l'une sur l'autre serait moindre que la différence entre les limites (*Premier principe*) ; donc cette différence ne pourrait jamais s'abaisser au-dessous de cet excès; ce qui est contraire à l'hypothèse; donc, etc.

144. La proportionnalité des arcs et des angles fournit une nouvelle mesure pour les angles plus commode que celle qu'on a indiquée, et c'est aussi la seule en usage. Voici en quoi elle consiste : on conçoit le cadran partagé en 90 arcs égaux ; chacun se nomme *un degré* ; chaque degré est divisé en 60 arcs égaux ; chacun se nomme *une minute*, et la minute est divisée en 60 arcs égaux ou en 60 *secondes* ; la seconde est divisée en 60 tierces ; la tierce en 60 *quartes*, et ainsi de suite en continuant la division *sexagésimale* ou par 60 ; et pour désigner un angle, il suffit d'énoncer le nombre de degrés, minutes, secondes, que renferme l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre. Cette désignation suffit pour connaître le rapport entre l'angle et l'angle droit.

Soit, par exemple, l'angle BON de 30 degrés; cela veut dire que l'arc BN contient 30 parties égales, dont le cadran contient 90; l'angle BON est donc à l'angle droit comme 30 : 90; ainsi cet angle est le $\frac{1}{3}$ de l'angle droit; si l'angle BON est de 20 degrés 47 minutes, on aura l'angle BON est à l'angle droit comme $20\frac{47}{60} : 90$.

145. On a adopté les signes suivans, qu'on place à droite au-dessus des nombres, pour énoncer des degrés, minutes, secondes :

Degrés $^{\circ}$.
Minutes $'$.
Secondes $''$.
Tierces $'''$.
Quartes ^{IV}.
Quintes ^{V}, rarement usitées.

Ainsi, $27^{\circ}\ 24'\ 0''\ 23'''$, signifie un arc de 27 degrés 24 minutes, point de secondes et 23 tierces.

146. (*Fig.* 28.) L'angle obtus MOB a pour mesure l'arc BCM, plus grand que 90°; supposons que le rayon OM tournant autour du centre O, s'éloigne de plus en plus du rayon OB; quand le rayon mobile sera arrivé en OA, il aura décrit la demi-circonférence ou 180°; il fera alors avec le rayon OB un angle de 180°, ou, ce qui revient au même, la droite OA est alors le prolongement de la droite OB.

Lorsque le rayon est parvenu en OQ, l'angle BOQ aura pour mesure l'arc BCMAQ, plus grand que 180°; en désignant l'angle BOQ, on ne peut savoir s'il s'agit de celui qui intercepte l'arc BCMAQ ou de celui qui intercepte l'arc QDB : mais l'énoncé de sa mesure fait

disparaître cette ambiguité; en disant, par exemple, un angle BOQ de 190°, on sait qu'il s'agit de celui qui est plus grand que deux angles droits ; parvenu en OD, l'arc BCAD et l'angle qui y correspond, renferment 270°; ainsi deux droites qui font entre elles un angle de 270°, sont perpendiculaires l'une à l'autre, comme lorsqu'elles forment un angle de 90°; mais les perpendiculaires OC, OD sont dirigées en sens opposés. Enfin, lorsque le rayon mobile est de retour en OB, il a décrit toute la circonférence ou 360°; donc deux droites, qui forment entre elles un angle de 360°, sont couchées l'une sur l'autre comme lorsqu'elles forment un angle nul.

Le mouvement peut encore se continuer, et on comprend ce qu'il faut entendre par des angles ou des arcs plus grands que 360°, etc. Ainsi l'aiguille des minutes décrit sur le cadran d'une montre 720° en deux heures.

147. On a donné le nom de complémens *additifs* à deux angles BON, NOC ou arcs BN, NC, dont la somme est égale à un angle droit ou à 90°; et celui de complémens *soustractifs* à deux angles MOB, MOC ou à deux arcs MCB, MC, dont la différence est égale à 90°.

Soit, par exemple, l'arc BN = 20°; il a pour complément additif 70°, et pour complément soustractif 110°; car $20 + 70 = 90$
et $110 - 20 = 90$.

Ainsi un angle aigu a pour complément additif un angle aigu, et un angle obtus pour complément soustractif; un angle obtus n'a pas de complément additif, et son complément soustractif est un angle aigu.

148. On nomme supplémens *additifs* deux arcs MOB, AOM, dont la somme est égale à deux angles droits ou à 180°: et supplémens soustractifs deux arcs QACB, QA, dont la différence est égale à 180°. Soit MBO = 120°, il aura pour supplément additif 60°, car 60 + 120 = 180, et 300 pour supplément soustractif, car 300 — 120 = 180.

149. (*Fig.* 28.) On nomme arcs *concentriques* ceux qui, comme FGH, AQD, sont décrits du même centre O, avec des rayons OF, OA différens. D'après ce qui a été démontré ci-dessus (140, 141), il est évident que l'arc FG est contenu dans son cadran FGH autant de fois que l'arc AQ est contenu dans son cadran AQD; ainsi les arcs AQ et FG, quoique de longueurs inégales, renferment le même nombre de degrés et parties de degré; mais les degrés de AQ sont plus grands que ceux de FQ. On nomme arcs *semblables* deux arcs de longueurs différentes, qui comprennent le même nombre de degrés : nous verrons ci-après la raison de cette dénomination.

150. Il est facile maintenant de convertir en degrés et parties de degré les quantités exprimées en angles droits; ainsi on dira que la somme des trois angles d'un triangle est égale à 180°; que dans un triangle équilatéral, chaque angle vaut 60°, que dans un triangle rectangle, la somme des angles aigus vaut 90°; que dans un triangle rectangle isocèle, chaque angle aigu 45°, etc.; on a calculé de cette manière la seconde colonne du tableau (102).

151. Lors de l'établissement du système métrique, on a introduit la division décimale dans les arcs et les angles. Ainsi on a divisé le

cadran en 100 parties égales, nommées *grades;* le grade en 100 parties égales, nommées *minutes;* la minute en 100 secondes, etc.

100 grades équivalent à 90 degrés, ou 10 grades à 9 degrés : il est aisé de les convertir les uns dans les autres. (Voir la table 6 à la fin du volume.) Nous ferons toujours usage de l'ancienne division en degrés.

152. (*Fig.* 29.) On trouve dans les étuis de mathématiques un instrument nommé *rapporteur;* c'est un demi-cercle, dont la circonférence est divisée en degrés; il sert à mesurer ou à faire des angles donnés sur le papier. A cet effet, on place le centre O sur le sommet, et le diamètre sur un des côtés de l'angle; la direction du second côté indiquera sur l'instrument le nombre de degrés interceptés par l'angle, et par conséquent sa mesure.

153. (*Fig.* 30.) Le *graphomètre* est un instrument qui sert à mesurer des angles sur le terrain; c'est un *rapporteur* sur de plus grandes dimensions. Le disque est en cuivre, et on peut le fixer à l'aide d'une vis O sur le pied DEF; il a un diamètre fixe COD, et un diamètre ou règle LOM, mobile autour du centre O; les diamètres portent à leurs quatre extrémités des pinnules ou visières; et souvent la règle mobile est garnie d'une lunette. Supposons qu'il s'agisse de mesurer l'angle BOA, que formeraient deux droites qu'on imaginerait tirées des objets B et A, vers l'objet O, on place l'instrument de manière que son centre soit en O; on fait tourner le disque autour de la noix du pied, jusqu'à ce que la règle fixe soit dirigée vers A; on s'en assure en visant par les pinnules C et D. Cela fait, on

vise par la règle mobile, et on la tourne jusqu'à ce qu'on aperçoive l'objet B; et l'arc DM intercepté sur le disque sera la mesure de l'angle.

Arcs interceptés par des droites, ou angles considérés dans le cercle.

154. Nous venons de voir que lorsqu'un arc intercepté par les côtés d'un angle a le sommet pour centre, cet arc est la mesure de l'angle; mais si le sommet n'est pas le centre, cet arc seul ne peut plus servir, *généralement parlant*, à mesurer l'arc. Il faut alors décrire toute la circonférence, prendre ensemble les deux arcs interceptés par les angles opposés au sommet. Nous allons commencer par le cas où l'un des arcs interceptés est nul; ce qui a lieu lorsque la circonférence passe par le sommet de l'angle (*fig.* 31). Soit BAC un angle formé par deux cordes BA, CA, et ayant son sommet sur la circonférence; en menant du centre O les deux rayons OB, OC, l'angle BOC est double de l'angle BAC; en effet, menant le diamètre AOD, l'angle extérieur BOD est le double de l'angle A du triangle isoscèle BAO (57); par la même raison l'angle DOC est double de l'angle OAC; donc la somme des deux angles BOD et DOC ou l'angle BOC est double de la somme des deux angles BAO et OAC ou de l'angle BAC; or, l'angle BOC, formé par deux rayons, a pour mesure l'arc BC; donc l'angle BAC, formé par deux cordes, a pour mesure la *moitié* de l'arc compris entre ses côtés; c'est-à-dire cet angle est contenu dans un angle droit autant de fois que la moi-

tié de l'arc est contenu dans le cadran. Si le diamètre AOD, au lieu d'être entre les deux cordes, les laisse d'un même côté, comme lorsqu'il s'agit de l'angle BAC', le raisonnement et la conclusion restent les mêmes. L'angle BOC', au lieu d'être la somme des deux angles, en est la différence.

155. On nomme *angle inscrit* celui qui a son sommet sur la circonférence; ainsi la proposition précédente revient à celle-ci : *tout angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc intercepté entre ses côtés;* on en conclut :

1° Tout angle aigu inscrit intercepte un arc moindre qu'une demi-circonférence, et réciproquement.

2° Tout angle obtus inscrit intercepte un arc plus grand qu'une demi-circonférence, et réciproquement.

3° Tout angle droit inscrit intercepte un arc égal à la demi-circonférence, et réciproquement.

4° L'angle BAN, formé par une corde et le prolongement d'une corde, a pour mesure la moitié des arcs BA et AC que sous-tendent les deux cordes.

5° Dans la même circonférence tous les angles inscrits BAC, BEC, qui interceptent le même arc BDC, sont égaux entre eux.

156. La droite AB restant fixe, supposons que la corde AC tourne autour du sommet A, jusqu'à ce qu'elle devienne tangente en A; alors l'angle MAB, formé par une tangente et une corde, a encore pour mesure la moitié de l'arc intercepté ACB.

En effet, l'angle DAM est droit (127), il a donc pour mesure la moitié de la demi-circon-

férence ACD ; l'angle inscrit BAD a pour mesure la moitié de BD ; donc l'angle BAM, somme des deux angles BAD et DAM, a pour mesure la moitié de l'arc ACB.

157. (*Fig.* 32.) Soit le sommet A de l'angle BAC dans l'intérieur de la circonférence ; menons la corde CD ; l'angle BAC extérieur au triangle ACD est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés C et D ; or, l'angle C, inscrit à la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc intercepté DE (155) ; et par la même raison l'angle D a pour mesure la moitié de l'arc BNC ; donc l'angle BAC a pour mesure la demi-somme des deux arcs interceptés DE, BNC.

On démontrerait de même que l'angle EAB a pour mesure la moitié de la somme des deux arcs BE, CD.

Si les deux arcs BE, CD, sont égaux, l'angle BAE a évidemment pour mesure l'arc intercepté BE ; donc lorsqu'un angle a pour mesure l'arc intercepté, il n'est pas nécessaire qu'il ait son sommet au centre ; il suffit que les arcs interceptés par les angles opposés au sommet soient égaux ; c'est ce qui a toujours lieu lorsque l'angle est au centre.

158. (*Fig.* 32.) Soit le sommet A′ de l'angle BA′C hors de la circonférence ; dans le triangle BA′D, l'angle intérieur A′ est égal à l'extérieur BDC moins l'autre angle intérieur A′BD ; or, l'angle BDC a pour mesure la moitié de l'arc BNC, et l'angle A′BD, la moitié de l'arc DE ; donc l'angle A′ a pour mesure la moitié de l'arc BNC moins la moitié de l'arc DE.

L'arc BNC présente sa face intérieure ou

concave à un spectateur qui serait placé en A', tandis que l'arc DE lui présente sa face extérieure ou convexe; on peut donc dire qu'*un angle extérieur à la circonférence, ou formé par deux sécantes, a pour mesure la moitié de l'arc concave moins la moitié de l'arc convexe.*

Moins l'arc convexe diffère de l'arc concave, plus l'angle A' est petit, et plus le sommet A' est éloigné du centre. Lorsque les deux arcs deviennent égaux, l'angle A' est nul, le sommet est situé à l'infini; c'est qu'alors les deux côtés de l'angle deviennent parallèles (58).

Il est aisé de voir que l'angle formé par la sécante A'EB et la tangente A'M, a aussi pour mesure la moitié de l'arc concave BNM moins l'arc convexe BEM.

Lorsque l'angle est formé par les deux tangentes AM, AM', il a pour mesure la moitié de l'arc concave MNM' moins la moitié de l'arc convexe MM'.

159. Il suit de ce qui précède, que lorsqu'un angle a pour mesure la moitié de l'arc intercepté entre ses côtés, il faut que la circonférence passe par le sommet de l'angle; car si ce sommet était dans l'intérieur ou hors de la circonférence, cet angle aurait pour mesure plus que la moitié, ou moins que la moitié de l'arc intercepté.

(*Fig.* 33.) De là résulte un moyen pratique de trouver sans compas des points qui soient situés sur une même circonférence. On a deux règles BA, AC, fixement jointes sous un angle quelconque; M et N sont deux points fixes sur lesquels glissent les deux règles, de sorteque M ne quitte jamais la branche AB, ni N la branche AC; alors les sommets A, A', A'', dans leurs diffé-

rentes positions, seront toujours sur la même circonférence, passant par les points fixes M et N, et le sommet décrira un arc double du supplément de l'angle BAC.

Problèmes sur les droites, les angles, les triangles, les perpendiculaires, les parallèles, et sur la circonférence.

160. On donne le nom de *problème* à toute question où il s'agit de trouver la position de certains points, de certaines droites, etc., ou les grandeurs de certains angles, de certaines droites, à l'aide d'autres points, d'autres droites qui sont connues. Les *données* d'un problème sont les parties qui sont connues; on nomme *constructions*, les opérations qu'il faut faire (les lignes qu'il faut tirer, etc.) pour parvenir à découvrir les parties inconnues; l'ensemble des opérations forme la *solution* du problème. Cette solution porte le nom de *solution géométrique*, lorsqu'on ne se sert que de deux instrumens, la règle et le compas; lorsqu'on se sert d'autres instrumens, la solution est dite *mécanique*. Dans tout ce qui suit, nous n'admettrons que les solutions géométriques; on ne se servira ni d'équerre, ni de rapporteur, etc., et nous nous dispenserons de donner les figures lorsqu'elles ne seront pas nécessaires pour la clarté du discours.

161. PROBLÈME I. Trouver un point qui soit éloigné d'un point donné, d'une distance donnée?

Solution. Prenez une ouverture de compas égale à la distance donnée; ayant posé une pointe du compas sur le point donné, on

décrira une circonférence avec l'autre pointe; tous les points de la circonférence satisfont à la question.

Le problème que nous venons de résoudre est dit *indéterminé*, parce qu'il admet une infinité de solutions, et qu'il ne faut pas se déterminer plutôt pour un point de la circonférence que pour tout autre.

On nomme *lieu géométrique du point cherché*, ou simplement *lieu*, la ligne qui renferme *tous les points* qui satisfont à un problème indéterminé; ainsi, dans le cas actuel, la circonférence est le *lieu* du point cherché.

Les points situés hors du lieu ne satisfont pas au problème.

162. (*Fig.* 26.) PROBLÈME II. Trouver un point K qui soit éloigné du point donné A de la distance donnée AK, et du point B de la distance donnée BK ?

Solution. Du point B, comme centre, et avec une ouverture de compas égale à BK, on décrit la circonférence KLN; le point cherché devra se trouver sur cette ligne. Du point A, comme centre, et d'un rayon égal à AK, on décrit une circonférence KLM, qui devra aussi contenir le point cherché; il sera donc aux intersections K et L des deux circonférences.

Le problème est dit déterminé; il n'admet que deux solutions.

La droite KL, qui réunit les deux points, est divisée en deux parties égales par la droite AB; on dit alors que les deux points K et L sont placés *symétriquement* par rapport à la droite AB; et la solution donne deux points *symétriques* par rapport à la droite donnée AB.

Le même problème sert aussi à construire le

triangle dont les trois côtés AB, BK, KL, sont donnés; et pour que le problème soit possible, il faut qu'un côté quelconque soit plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence (69). Lorsque les trois côtés sont égaux, le triangle construit est *équilatéral.*

163. (*Fig.* 34.) **Problème III. Trouver un point également éloigné des deux points donnés A et B ?**

Solution. Du point A, comme centre, avec une ouverture de compas plus grande que la moitié de la distance AB, décrivez une circonférence; du point B, comme centre, et avec la même ouverture de compas, décrivez une seconde circonférence, qui coupera la première en deux points C et D *symétriques*, par rapport à la droite AB; joignez C et D par une droite, tous les points de cette droite seront également éloignés des extrémités A et B (77), et satisfont au problème; et à la droite CD est le *lieu géométrique* du point cherché.

Sans connaître la moitié de AB, on peut trouver une distance plus grande; il suffit de prendre cette distance égale à la ligne entière.

La droite CD est perpendiculaire sur AB, en I milieu de cette droite (77).

Ces trois solutions n'exigent que l'emploi du compas, sans avoir besoin de recourir à la règle.

164. (*Fig.* 34.) **Problème IV. Etant donnés deux points C et D, trouver un point N situé sur la direction de CD, sans employer la règle, et par conséquent sans tirer la droite CD?**

Solution. Cherchez deux points O et O′ également éloignés de C et D (163); cherchez un point N également éloigné de O et O′; ce point N sera celui qui est demandé (79); et on peut en trouver tant d'autres qu'on voudra.

165. (*Fig.* 34) PROBLÈME V. Étant donnée une longueur AB, trouver le point milieu I?

Solution La même qu'au problème III; mais cette solution exige qu'on mène la droite CD, et par conséquent nécessite l'emploi de la règle. On peut donc diviser une droite, en 2, en 4, en 8 parties égales, et en général en un nombre de parties égales exprimé par une puissance de 2; on peut donc aussi, sur une droite AB, comme diamètre, décrire une circonférence; le milieu de cette droite en sera le centre.

La même solution est encore applicable, lorsqu'il s'agit d'élever une perpendiculaire sur le milieu inconnu d'une droite.

166. (*Fig* 34.) PROBLÈME VI. Par un point quelconque I de la droite AC, élever une perpendiculaire sur cette droite?

Solution. A partir du point I, prenez sur la droite AE deux distances égales IO, et IO′; cherchez un point N également éloigné de O et de O′; la droite NI est la perpendiculaire demandée : les mêmes opérations servent à faire au point I un angle droit EIN.

167. PROBLÈME VII. D'un point N situé hors de la droite AC, abaisser une perpendiculaire sur cette droite (*fig.* 34)?

Solution. Posez une pointe du compas sur N, et ouvrez le compas, de sorte que l'autre pointe soit au-dessous de la droite AC, et

avec cette ouverture décrivez une circonférence ; la droite AC, ayant des points dans l'intérieur de la circonférence, est une sécante, et coupera la circonférence en deux points O et O' ; cherchez un point D également éloigné de O et de O', la droite DN sera la perpendiculaire demandée.

168. (*Fig.* 16.) Problème VIII. Élever à l'extrémité B une perpendiculaire sur la droite DB, en supposant qu'on ne puisse pas prolonger DB du côté de B ?

Solution. Cherchez un point N également éloigné de D et de B ; prolongez DN d'une longueur égale à elle-même, de sorte que l'on ait DN = NA ; la droite AB est la perpendiculaire demandée (82).

169. Problème IX. Trouver un point qui soit éloigné d'une droite donnée, d'une distance donnée ?

Solution. Par un point quelconque pris sur la droite, élevez une perpendiculaire ; à partir de ce point, portez en dessus et en dessous sur cette perpendiculaire, une longueur égale à la distance donnée ; par les extrémités ainsi déterminées de cette droite, élevez des perpendiculaires qui seront nécessairement parallèles à la droite donnée, et qui auront tous leurs points éloignés de la distance demandée ; par conséquent, les deux droites parallèles sont le lieu géométrique du point cherché.

170. Problème X. Par un point donné mener une parallèle à une droite donnée ?

Solution. Du point donné abaissez une perpendiculaire sur la droite (167) ; par le même point, élevez une perpendiculaire sur la per-

pendiculaire (166), elle sera la parallèle demandée.

Cette solution n'exige que l'emploi du compas (voir 173 une seconde solution).

171. (*Fig* 35.) PROBLÈME XI. Mener par le point O une droite OM, faisant avec la droite donnée OG un angle égal à l'angle donné DAE?

Solution. Prenez sur les côtés AD, et AE, deux points quelconques B et C; portez AC de O en I, et faites sur OI un triangle OIK égal au triangle ABC (162); l'angle O sera égal à l'angle donné.

Il est plus court de prendre AB égal à AC, en décrivant l'arc BC, ensuite du point O comme centre, et du même rayon, on décrit l'arc indéfini IKM; on porte la corde CB de I en K, on mène la droite KO, et les deux triangles ABC, OIK, sont égaux. On voit ce qu'il faut faire pour construire un angle égal à la somme de tant d'angles qu'on voudra; par conséquent, comment on peut construire un angle double, triple, quadruple d'un angle donné, comment on construit un angle égal à la différence de deux angles donnés; pour avoir le complément d'un angle, il suffit d'élever par son sommet une perpendiculaire à l'un des côtés, et l'angle que forme cette perpendiculaire avec le second côté, sera le complément cherché; pour avoir le supplément d'un angle ou sa différence avec deux angles droits, il suffit de prolonger un des côtés, et l'angle adjacent est le supplément demandé.

Connaissant donc deux angles d'un triangle, on construira le troisième, en ajoutant les

deux angles donnés, et prenant le supplément de la somme.

172. (*Fig.* 35.) PROBLÈME XII. Diviser l'angle BAC en deux parties égales?

Solution. Du sommet A, comme centre, et d'un rayon arbitraire, décrivez l'arc BC; abaissez du point A, sur la corde BC, la perpendiculaire AN; elle divisera la corde, l'arc et l'angle en deux parties égales (123).

Le même problème sert aussi à diviser un arc en deux parties égales.

On sait donc diviser un angle ou un arc, en 4, en 8, en 16 parties égales, et en général en un nombre entier de parties égales, désigné par une puissance de 2; or, on sait construire un angle droit ou de 90°, on sait donc aussi construire les angles qui suivent :

90°.
45°.
22° 30'.
11° 15'.
5° 37' 30".
2° 48' 45".
1° 24' 22" 30'''.
0° 42' 11" 15''', etc.

En construisant un triangle équilatéral (162), on se procure un angle de 60°; donc on peut trouver géométriquement les angles de

60°.
30°.
15°.
7° 30'.
3° 45'.
1° 52' 30".
0° 56' 15".

La différence entre les deux arcs 1° 24′ 22″ 30‴, et 0° 56′ 15″, est de 28′ 7″ 30‴; cet arc ne diffère pas de deux minutes de l'arc d'un demi-degré.

173. (*Fig.* 36.) PROBLÈME XIII. Par le point donné B, mener une droite parallèle à la droite donnée M L?

Solution. D'un point A, comme centre, pris arbitrairement sur N L, décrivez du rayon AB l'arc BC; du point donné B, comme centre, et du même rayon BA, décrivez l'arc indéfini ADK; portez la corde CB de A en D, tirez DBM, elle sera la parallèle demandée; car les angles alternes-internes BAC, ABD sont égaux (51).

Une quelconque des propriétés énoncées (51) peut servir à résoudre le problème.

174. (*Fig* 25.) PROBLÈME XIV. Trouver un point O également éloigné de trois points donnés A, B, E?

Solution. Menez les droites AB, AE, et les perpendiculaires MOD, QOC, sur les milieux de ces droites; le point cherché devant se trouver en même temps sur les deux perpendiculaires, sera au point O de leur intersection; pourvu que les trois points ne soient pas sur la même droite, cette intersection aura toujours lieu (53).

La même construction sert donc aussi à faire passer une circonférence EABCE par trois points donnés, ou par les trois sommets d'un triangle ABE; on appelle cette dernière opération, *circonscrire* une circonférence à un triangle, et on nomme improprement *centre* du triangle, le centre de la circonférence circonscrite.

Lorsque le triangle est *acutangle*, son centre est dans l'intérieur du triangle ;

Rectangle, son centre est sur le milieu de l'hypothénuse ;

Obtusangle, le centre est hors du triangle (159).

Plus l'angle devient obtus, plus le centre s'éloigne, et plus le rayon grandit; de sorte que, lorsque l'angle est presque égal à deux angles droits, alors les trois points sont presque en ligne droite, le centre est à l'infini, et le rayon est infiniment grand ; c'est ce qui fait dire qu'une droite est une circonférence dont le centre est à l'infini, et dont le rayon est infini : c'est une locution elliptique pour exprimer l'idée de limite.

La perpendiculaire élevée sur le milieu de BE passe aussi par le point O ; donc *les trois perpendiculaires élevées respectivement sur les milieux des côtés d'un triangle, se rencontrent en un même point, qui est le centre du triangle.*

175. PROBLÈME XV. (*Fig.* 37.) Par un point donné I sur une circonférence LIBL, mener une tangente à cette circonférence?

Solution. A l'extrémité I du rayon CI, qui passe par le point I, élevez une perpendiculaire KIT; elle sera la tangente demandée (127).

176. PROBLÈME XVI. (*Fig.* 37.) Étant donnés les deux points B et I, trouver un troisième point L, tel qu'en menant les droites LB, LI, l'angle BLI soit égal à l'angle donné KIV?

Solution. Sur le milieu BI élevez la perpen-

diculaire SX; au point I élevez une perpendiculaire à la droite donnée IK; elle rencontrera SI en un point C (53); de ce point comme centre et du rayon CI décrivez une circonférence; elle sera tangente à la droite TIK et passera par le point B; chaque point de l'angle BLSI satisfait à la question. En effet, soit L un point de cet arc, l'angle inscrit BLI a pour mesure la moitié de l'arc BXI (155); mais telle est aussi la mesure de l'angle BIT formé par une corde et une tangente; donc l'angle BLI est égal à l'angle BIT, et par conséquent à l'opposé au sommet KIV; ainsi l'arc BLSI est le lieu géométrique du point cherché, et il n'y a donc qu'une certaine portion de la circonférence qui réponde à la question. Si l'angle donné était égal à BIK, adjacent à KIV, la construction serait la même; mais ce serait l'arc BXI qui serait le lieu géométrique du point cherché. La circonférence entière répond au problème, si on l'énonce ainsi : Trouver un point tel qu'en le joignant par des droites à deux points donnés, l'angle formé par ces droites soit égal à un angle donné ou à son supplément.

Faisons tourner la circonférence autour de la corde BI, de manière qu'elle prenne la position inverse BL′ S′I, il est évident que tous les points de l'arc BL′I répondent aussi au problème s'il s'agit de l'angle aigu KIV; donc les deux arcs BLSI, BL′S′I sont les lieux géométriques du point; les points de ces arcs sont placés symétriquement par rapport à la corde BI.

La même construction sert à décrire, sur une droite donnée BI, un arc tel que tous

les angles inscrits soient égaux à un angle donné, ou, comme il est dans l'usage de s'exprimer, un arc qui soit *capable* d'un angle donné.

L'arc capable d'un angl aigu est plus grand qu'une demi-circonférence.

L'arc capable d'un angle droit est égal à une demi-circonférence.

L'arc capable d'un angle obtus est plus petit qu'une demi-circonférence.

Si donc l'angle donné KIV est droit, le problème se réduit à décrire une circonférence sur BI comme diamètre.

Le problème XVI est encore identique à celui-ci : En quel point faut-il être placé pour voir la droite BI sous un angle donné BLI, BI pouvant représenter la façade d'un édifice? Ainsi, il y a une infinité de positions; il y en a deux S et S', où le spectateur est le plus éloigné de l'objet; mais, en restant sur l'arc BLSI, il peut s'approcher de l'objet, et le voir toujours sous le même angle; pour changer d'angle, il faut qu'il quitte l'arc; en entrant dans l'intérieur, l'angle augmente; en sortant de la circonférence, l'angle diminue (159).

177. Problème XVII. Étant données deux droites, déterminées de longueur, trouver un point tel qu'en s'y plaçant on aperçoive la première droite sur un angle donné A, et la seconde sous l'angle donné B?

Solution Sur la première longueur on décrira les arcs symétriques capables de l'angle A, et sur la seconde les arcs symétriques capables de l'angle B ; ces quatre arcs pourront en général se couper en huit points; il y aura

par conséquent huit solutions ; mais, selon la diversité des positions et des longueurs des droites, des ouvertures des angles, ces solutions peuvent devenir moindres ; ainsi, lorsque les deux angles sont droits, il n'y a jamais que deux solutions ; dans la même supposition, il ne reste plus qu'une solution, lorsque les deux longueurs ont une extrémité commune : il y a aussi des cas où le problème est impossible.

178. **Problème XVIII.** Etant donnés un point et une droite de longueur déterminée, trouver un point tel qu'en s'y plaçant, un spectateur soit éloigné du point donné, d'une distance donnée, et aperçoive la droite sous un angle donné?

Solution. Du point donné comme centre, et avec la distance donnée pour rayon, décrivez une circonférence ; sur la droite donnée, décrivez les arcs *symétriques* capables de l'angle donné, les intersections de la circonférence et de l'arc donneront des points qui satisfont à la question. Il y a en général quatre solutions : voici les divers cas qui peuvent se présenter :

	Nombres de solutions.
1° La circonférence coupe les deux arcs	4.
2° La circonférence touche un arc et coupe l'autre	3.
3° La circonférence touche les deux arcs	2.
4° La circonférence touche un arc et ne rencontre pas l'autre	1.

5° La circonférence ne rencontre ni l'un ni l'autre arc ; solution impossible.

179. Remarquons en principe, toutes les fois que le nombre total des solutions d'un problème est pair, il peut y avoir des cas particuliers où le nombre des solutions décroît jusqu'à devenir nul, et alors le problème n'a pas de solution ; mais si le nombre des solutions est impair, le nombre peut encore se réduire, mais il ne devient pas nul ; on ne peut démontrer ce principe général qu'à l'aide des théories qu'on doit au calcul algébrique ; la géométrie, réduite à ses propres ressources, ne fournit pas même les moyens de soupçonner l'existence de cette admirable propriété de l'espace.

180. (*Fig.* 38.) PROBLÈME XIX. Par un point I situé hors de la circonférence MANB, mener une tangente à la circonférence?

Solution. Joignez le centre C au point I par une droite, sur laquelle, comme diamètre, vous décrivez la circonférence CAIBC qui rencontre la circonférence donnée en deux points A et B; les droites IA, IB, sont chacune tangente à la circonférence en A et en I; car CAI, CBI sont des angles droits (155).

Ici le nombre des solutions est pair; lorsque le point I est sur la circonférence, il n'y en a qu'une ; lorsqu'il est dans l'intérieur, le problème est impossible (179).

Les deux triangles rectangles CAI, CBI étant égaux (81), il s'ensuit que les deux tangentes menées d'un même point sont égales ; elles font, avec la corde AB qui joint les points de contact, des angles IAB, IBA, égaux entre eux (39), et la sécante diamétrale MCNI divise l'angle des tangentes en deux parties égales, et est perpendiculaire sur la

corde AB; l'angle AIB a pour mesure l'arc AM, moins l'arc AN.

Un spectateur placé en I verra la circonférence sous l'angle AIB; il n'en apercevra que la portion ANB, qu'on nomme la *convexité* du cercle vue du point I; l'autre partie AMB est sa *concavité*. Si I est un point lumineux, il n'éclairera que l'arc convexe, l'arc concave sera dans l'ombre. Plus le point I s'éloigne du centre, en restant toujours sur la sécante diamétrale, et plus l'arc AM diminue et plus l'arc AN augmente, par conséquent, plus l'angle AIB diminue et devient aigu; il s'évanouit lorsque les deux tangentes sont parallèles, alors les points A et B sont diamétralement opposés; ainsi, plus on s'éloigne d'un cercle, et plus la partie vue devient grande; elle est toujours moindre que la partie non vue, et la différence diminue avec l'éloignement.

181. Problème XX. Mener à un cercle une tangente, qui soit parallèle à une droite donnée?

Solution. Du centre du cercle, abaissez une perpendiculaire sur la droite donnée; elle coupera le cercle en deux points; par chacun menez une tangente; elle remplira les conditions du problème.

Ainsi, un corps qui parcourt une circonférence, prend dans ce mouvement toutes les directions imaginables, car la direction en chaque point n'est que la tangente à la courbe en ce point.

Quoique le nombre des solutions soit *pair*, le problème est toujours possible.

182. Problème XXI. Mener une tangente à une circonférence, qui fasse un angle donné avec une droite donnée?

Solution. Par un point quelconque pris sur la droite donnée, menez deux droites faisant, avec la première, un angle égal à l'angle donné; menez des tangentes parallèles à ces droites (181), vous aurez quatre tangentes dont chacune satisfait à ce qui est demandé; lorsque l'angle donné est droit, il n'y a que deux tangentes, mais le problème est toujours possible; les quatre tangentes forment un parallélogramme dont les côtés touchent le cercle; on dit dans ce cas que le parallélogramme est *circonscrit* à la circonférence, et que celle-ci est *inscrite* au parallélogramme.

Les quatre points de contacts sont les sommets d'un parallélogramme rectangle.

183. (*Fig.* 38.) PROBLÈME XXII. Trouver un point I tel qu'en s'y plaçant, on aperçoive la circonférence sous l'angle donné BIA?

Solution. Menez deux rayons faisant un angle ACB égal au supplément de l'angle donné, et les deux tangentes AI, BI, qui se rencontrent au point I. Du point C, comme centre, et du rayon CI, décrivez une circonférence, chacun de ses points remplit la condition exigée; ainsi, le lieu géométrique du point cherché est une circonférence concentrique à celle qui est donnée.

Lorsque l'angle donné est droit, l'arc convexe est un quart de cercle, et l'arc concave les trois quarts du cercle.

184. (*Fig.* 38.) PROBLÈME XXIII. Quelles sont les droites les plus courtes et les plus longues que l'on puisse mener d'un point extérieur I à la convexité et la concavité d'un cercle?

Solution. Par le point I, menez la sécante diamétrale INCM, et les tangentes IA, IB.

IN est le chemin le plus court pour aller à la convexité.

IA est le chemin le plus long pour aller à la convexité, et le plus court pour aller à la concavité.

IM est le chemin le plus long pour aller à la concavité.

En effet, soient O, P, deux points quelconques pris l'un sur la convexité, et l'autre sur la concavité, on a

$$CO+OI>CN+NI$$
$$CA+AI>CO+OI;$$

ôtant de part et d'autre les rayons CA, CO, CN, il reste les inégalités $OI>NI$,
$AI>OI$;
on a de même $IM=CI+CM=CI+CP>IP$;
donc $IM>IP$.

Les deux triangles PCI, ACI, ont les côtés CP, CA égaux; le côté CI en commun; mais l'angle compris ACI est plus grand que l'angle PCI; donc $AI<PI$ (70).

Il résulte de ceci, que la portion extérieure NI de la sécante diamétrale, est un chemin *minimum*, et toute la sécante est un chemin *maximum*; la tangente est à la fois un *maximum* pour la convexité, et un *minimum* pour la concavité.

Cette propriété, et celle qui est donnée n°. 115, peuvent se ramener à un seul énoncé, lorsqu'on établit les définitions qui suivent :

1° Un point X, situé entre les extrémités M, N, d'une droite, la partage en deux segmens MX, XN, dont la somme est égale à la longueur de la droite; ces segmens sont dits *additifs*.

2° Un point I, situé d'un même côté des

deux extrémités M, N, d'une droite, la partage en deux segmens IM, IN, dont la différence est égale à la droite; ces segmens sont dits *soustractifs*.

Cela admis, on voit qu'en prenant un point sur un diamètre, les deux segmens formés par ce point sur le diamètre, donnent, l'un un *maximum*, et l'autre un *minimum*.

On nomme *distance* d'un point à une circonférence, le plus court chemin pour aller à cette circonférence.

185. (*Fig.* 39.) Problème XXIV. Trouver un point également distant de deux droites données EAB, DAC?

Solution. Menez la droite EAM qui divise l'angle BAC, et son opposé au sommet DAG, en deux parties égales; menez encore la droite NAO qui divise les angles adjacens en deux parties égales; chaque point de ces deux droites satisfera à la question. En effet, soit M un de ces points; abaissant les perpendiculaires MR, MS, on formera deux triangles rectangles MAR, MAS, égaux, comme ayant une hypothénuse commune et les angles égaux; donc les perpendiculaires MR, MS, sont égales; les deux droites perpendiculaires sont donc les lieux géométriques du point cherché.

Les points non situés sur ces droites ne satisfont point à la question.

186. Problème XXV. (*Fig.* 40.) Etant données les trois droites LM, NO, PQ, trouver un point I également distant des trois droites LM, NO, PQ?

Solution. Partagez les angles A, B, C, et leurs adjacens en deux parties égales, on obtiendra six droites, dont les intersections

satisfont au problème. En effet, considérons les deux droites CI et BI dans l'intérieur du triangle; abaissons les trois perpendiculaires IF, IG, IK; on aura IF = IG = IK (185); donc IF = IG = IK; ainsi le point I satisfait au problème. Menons la droite AI; les deux triangles rectangles AIF, AIK, ayant l'hypothénuse en commun et les côtés IF, IK, égaux, sont égaux; donc l'angle FAI = KAI; ainsi la droite qui divise l'angle A en deux parties égales passe aussi par le point I : on démontre de même que les six droites, passant par groupe de trois par les mêmes points, ne donnent que quatre points d'intersection, dont un seul est dans l'intérieur du triangle, les trois autres R, R', R'', sont hors du triangle.

Ce problème est identique à celui-ci; mener un cercle qui soit tangent à trois droites données, car si du point I comme centre, et du rayon IF, on décrit un cercle, il touchera les trois côtés du triangle; il en est de même du cercle décrit du centre R avec le rayon RO; on peut donc mener quatre cercles qui touchent trois droites; celui qui est intérieur se nomme *cercle inscrit* au triangle, et le triangle est dit *circonscrit* au cercle.

Il y a en général quatre solutions, nombre pair (179).

Il y a deux solutions lorsque deux des droites sont parallèles, et aucune solution lorsque les trois droites sont parallèles; lorsque les trois droites passent par le même point, le cercle se réduit à ce point.

187. Problème XXVI. (*Fig.* 41.) Trouver un point qui soit également distant du point donné F et de la droite donnée LN?

Solution. Abaissez la perpendiculaire FT ; il est évident que le point milieu A satisfait à la question ; mais il y a encore une infinité d'autres points qui remplissent la condition exigée. En effet, soit pris un point quelconque P sur la droite FT ; menez une parallèle à LN ; du point F comme centre et d'un rayon égal à PT, décrivez une circonférence qui coupera la parallèle en deux points M et M' qui satisfont au problème. Abaissez la perpendiculaire MG, l'on a par construction MF = PT ; or PT = MG ; donc MF = MG ; si l'on prend les points P, P, P, très-rapprochés, les points M, M, M, seront aussi rapprochés, et les concevant réunis par une ligne, on obtient la courbe tracée dans la figure, qui est connue sous le nom de *parabole.* Elle n'est pas fermée, et s'étend à l'infini en s'éloignant de plus en plus de la ligne FTP nommée *axe.* Ne pouvant être tracée d'une manière continue par le compas, cette courbe n'est pas *géométrique* (160). Mais il existe un procédé mécanique très-simple pour la tracer ; après avoir placé une règle sur la ligne fixe NL, on applique le côté KL d'une équerre contre la règle ; on prend un fil égal en longueur au second côté LM' de l'équerre ; on attache une de ses extrémités au point fixe F et l'autre au sommet M' de l'équerre ; on meut celle-ci le long de la règle jusqu'à ce que le fil soit tendu ; il est évident que dans cette position le sommet M' de l'équerre sera également distant de F et de LN ; maintenant faisant glisser l'équerre le long de la règle vers T, le fil se relâchera ; mais en le tenant toujours tendu et appliqué contre le côté LM' à l'aide d'un

style, le fil et le côté de l'équerre se raccourcissant toujours de la même longueur, la pointe du style reste toujours également distante du point F et de la droite; il décrira donc un arc de parabole; plus le côté de l'équerre sera long, et plus cet arc sera grand: on s'y prend de la même manière pour décrire l'arc symétrique situé de l'autre côté de l'axe.

On a donné le nom de *directrice* à la droite LN, parce qu'elle dirige le mouvement de l'équerre; une propriété optique a fait donner le nom de *foyer* au point F, et de *rayon vecteur* à la droite FM.

Il est très-facile de démontrer 1° qu'un point situé dans l'intérieur de la parabole est plus près du foyer que de la directrice; 2° qu'un point situé hors de la parabole est plus près de la directrice que du foyer; 3° que la droite MI, qui divise l'angle GMF en deux parties égales, et qui est par conséquent perpendiculaire à GF, a tous ses points, à l'exception du point unique M, plus près de la directrice que du foyer; que cette droite a donc tous ses points hors de la parabole, à l'exception de M, qui est sur la courbe; que par conséquent cette droite est *tangente à la parabole*.

Cette courbe est celle que décrivent les projectiles lancés dans le vide.

Si la directrice passe par le foyer, la parabole se réduit évidemment à son axe. (Note 3.)

188. PROBLÈME XXVII. (*Fig.* 41.) *Décrire un cercle qui passe sur le point donné F, et touche la droite LN en un point G?*

Solution. Menez GF; élevez en G une perpendiculaire à LN et une autre sur le milieu

de GF ; le point d'intersection M sera le centre du cercle demandé.

Nous reprendrons plus loin la suite de ces problèmes, en ce qui concerne les contacts des cercles et des droites.

Mesure des surfaces ou aires.

189. Nous appelons unité des mesures superficielles, ou simplement *unité superficielle* l'étendue superficielle d'un carré qui a pour côté l'unité de longueur ; ainsi, dans le système métrique aujourd'hui en usage, l'unité superficielle est l'étendue en surface d'un carré, dont le côté a 1 mètre de longueur ; ou, par abréviation, *le mètre carré ;* dans l'ancien système, c'était *la toise carrée* qui servait d'unité de superficie.

190. Nous appelons *aire d'une surface* le nombre d'unités superficielles qu'elle contient. On dira, par exemple, que l'aire de tel triangle, ou de tel cercle, est de 120 mètres carrés ; alors on entend que ce triangle, que ce cercle contient 120 fois le mètre carré. Il ne faut donc pas confondre les deux expressions *surface* et *aire ;* la première exprime un espace quelconque, comme limite d'un volume (4) ; la seconde considère cet espace relativement à l'unité ; par exemple, l'espace plan renfermé entre les deux côtés indéfiniment prolongés d'un angle, est une surface qui n'a pas d'aire ; il n'y a que des espaces fermés, limités de toutes parts, qui puissent avoir une aire. Toutefois, dans le discours, on se sert habituellement et sans inconvénient de l'expression surface pour désigner une aire ;

ainsi, dans l'exemple cité, on dira que le triangle a 120 mètres carrés de surface.

191. Deux surfaces égales, c'est-à-dire qui étant placées l'une sur l'autre se recouvrent entièrement, ont évidemment la même aire. Mais deux surfaces qui ont la même aire peuvent être, mais ne sont pas nécessairement égales; ainsi, un cercle et un triangle peuvent avoir même aire, et toutefois le cercle ne peut pas couvrir le triangle. L'égalité d'aires n'entraîne donc pas l'égalité par superposition. Pour les distinguer, on a donné le nom de *surfaces équivalentes* à celles qui, sans être égales, ont la même aire; ainsi, deux surfaces égales sont toujours équivalentes, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Aire des rectangles.

192. Dans un parallélogramme rectangle, on appelle les deux côtés adjacens, l'un la *base*, et l'autre la *hauteur* du rectangle. Il est évident que *deux rectangles, qui ont des bases égales et des hauteurs égales, sont égaux et par conséquent équivalens.*

193. (*Fig.* 42.) Les aires de deux rectangles ABCD, ABEF, de même base, sont entre elles comme leurs hauteurs; autrement le grand rectangle contient le petit autant de fois que la grande hauteur contient la petite; en effet, supposons que l'on ait la proportion AC : AE :: 3 : 10.

Divisant AE en 10 parties égales, AC en contiendra 3; en menant par les points de division des parallèles à la base commune AB, on partagera le grand rectangle en 10 rectan-

gles égaux, dont le petit rectangle AD en contient 3; on aura donc ABCD : ABEF : : 3 : 10.

Les aires sont donc dans le même rapport que les hauteurs; et cette proposition existe lors même que le rapport entre les hauteurs ne peut s'exprimer exactement, mais seulement par des limites. On fera les raisonnemens analogues à ceux qui ont été développés aux n°s. 141 et suivans au sujet de la mesure des angles.

194. Avant d'aller plus loin, nous devons remarquer que par le mot rapport entre deux quantités, nous entendons le nombre entier, fractionnaire, commensurable ou non, qui désigne combien de fois la seconde quantité ou le conséquent contient la première ou l'antécédent : ainsi, par rapport du diamètre à la circonférence, nous entendons le nombre de fois que la circonférence contient son diamètre; cette espèce de rapport est le seul dont on fasse usage en géométrie, aussi le désigne-t-on, même dans les traités d'arithmétique, sous le nom de *rapport géométrique*. Les deux termes d'un rapport doivent être exprimés en même espèce d'unités; ainsi, il serait absurde de comparer une longueur à une aire; mais dans une *proportion* qui n'est autre chose que l'égalité de deux rapports, l'unité du premier rapport peut n'être pas la même que celle du second. Ainsi, entre deux aires, il peut exister même rapport qu'entre deux longueurs. Nous en avons un exemple ci-dessus (193). Les rapports étant des nombres, on peut établir un rapport entre des rapports; quoique ces notions appartienent

à l'arithmétique, nous en faisons mention parce qu'il est important de se les rappeler.

195. (*Fig.* 42.) Soient les deux rectangles ACGH, AEFB, de bases et de hauteurs différentes, on peut toujours les concevoir placés comme on le voit dans la figure; en prolongeant CG jusqu'en D, on formera un troisième rectangle ABDC, auquel on peut comparer chacun des rectangles donnés (193); ce qui fournit les deux proportions:

$$ACGH : ABDC :: AH : AB;$$

car ils ont le côté commun AC (193);

$$AEFB : ABDC :: AE : AC;$$

car ils ont le côté commun AB (193); d'où l'on tire

$$ACGH : AEFB :: \frac{AH}{AE} : \frac{AB}{AC} :: \frac{AH}{AB} : \frac{AE}{AC}$$

Ainsi l'*aire du premier rectangle est à celle du second*, comme la première base, divisée par la seconde, est à la seconde hauteur, divisée par la première; ou comme le rapport *direct des bases au rapport renversé ou inverse des hauteurs*.

196. (*Fig.* 43.) Pour trouver l'aire du rectangle ABCD, on cherche combien de fois l'unité linéaire (le mètre) est contenue dans la base AB, ce qui donne un premier nombre; ensuite combien de fois elle est contenue dans la hauteur AC, ce qui donne un second nombre; le produit de ces deux nombres exprime l'aire du rectangle. Supposons d'abord que AB et AC contiennent le mètre, des nombres entiers de fois; que l'on ait

$$AB = 4 \text{ mètres},$$
$$AC = 6 \text{ mètres},$$

en menant par les points de divisions de la hauteur des parallèles à la base et par les points de divisions de la base des parallèles à la hauteur, on décompose le rectangle en 24 carrés égaux; donc l'aire du rectangle est égale à 24 mètres carrés. Ce résultat ne dépend pas des nombres entiers que l'on a choisis.

Si $AB = 4\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$ mètres,

$AC = 5\frac{2}{7} = \frac{37}{7}$ mètres.

Concevons que, sans toucher à la hauteur, on triple la base, on aura un second rectangle ayant pour base 13 mètres, et l'aire sera trois fois celle du rectangle ABCD (193). Si, avec cette base triple, on rend la hauteur 7 fois plus grande, on aura un troisième rectangle ayant 37 mètres de hauteur et 13 mètres de base, et dont l'aire contiendra 7 fois celle du second, et par conséquent $3 \times 7 = 21$ fois celle du rectangle donné ABCD; or, le troisième rectangle a pour aire 13×37 mètres carrés; donc le rectangle ABCD aura pour aire $\frac{13 \times 37}{3 \times 7}$ mètres carrés ou $\frac{13}{3} \times \frac{37}{7}$, c'est-à-dire le nombre de mètres de la base multipliée par celui de la hauteur; d'où l'on conclut cette règle : l'aire d'un rectangle est égale au produit du nombre de mètres de sa base par celui de sa hauteur; et ordinairement, en s'exprimant d'une manière abrégée, on dit que *l'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur; mais il faut toujours sous-entendre le nombre de*

mètres de sa base, etc. Cette locution elliptique est adoptée pour toutes les évaluations des surfaces : nous n'en répéterons plus l'observation.

L'aire d'un carré est donc égale à son côté multiplié par lui-même. De là vient qu'en arithmétique cette sorte de produit, d'un nombre par lui-même, porte le nom de *carré*.

Les aires des rectangles sont donc entre elles comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs : c'est aussi ce qu'on peut conclure directement (195); car les quatre longueurs AB, AH, AC, AE, étant rapportées à l'unité de mesure, elles sont exprimées en nombre; et l'on a $ACGH : AEFB :: \frac{AH}{AB} : \frac{AE}{AC} :: AH \times AC : AB \times AE$.

Il est reçu en géométrie qu'on peut dire indifféremment produit de deux lignes ou *rectangle* de deux lignes; par-là on entend l'aire du rectangle qu'on aurait en prenant ces deux lignes pour côtés adjacens.

197. C'est surtout dans l'évaluation numérique des surfaces qu'on reconnaît les grands avantages du nouveau système métrique sur celui qui l'a précédé : nous allons parler du premier et ensuite du dernier, dont on peut encore souvent avoir besoin.

Nouveau système métrique; surfaces.

Ce système est renfermé dans les deux tableaux suivans :

1° Le millimètre carré = un carré dont le côté a un millimètre de longueur.

2° Le centimètre carré = un carré dont le côté a un centimètre de longueur.

3° Le décimètre carré = un carré dont le côté a un décimètre de longueur.

4° Le mètre carré = un carré dont le côté a un mètre de longueur.

5° L'are = un carré dont le côté a dix mètres de longueur.

6° L'hectare = un carré dont le côté a cent mètres.

$1^{m\,c} = 100^{déci\,c} = 10000^{centi\,c} = 1000000^{mm\,c}$

$1^{déci\,c} = 100^{centi\,c} = 10000^{centi\,c}$

$1^{centi\,c} = 100^{mm\,c}$

1 are $= 100^{m\,c}$

1 hectare $= 100$ ares $= 10000^{m\,c}$

Dans ce tableau, $^{m\,c}$ désigne le mètre carré, $^{déci\,c}$ le décimètre carré, etc.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'évaluer un espace rectangulaire ayant ces dimensions :

$125^{m},26$ hauteur.
$123^{m},24$ base.

Le produit de ces deux nombres est

$15437^{m\,c},0424$;

ainsi l'aire cherchée renferme 15437 mètres carrés et $\frac{424}{10000}$ d'un mètre carré, ou bien 424 centimètres carrés, ou 4 décimètres carrés et 24 centimètres carrés : si c'est un champ, on l'évalue en hectares; ainsi il contient 1 hectare $5437^{m\,c},0424$; ou en prenant l'hectare pour unité, et négligeant les parties trop petites, on aura $1^{hect.},5437$.

Ancien système métrique; surfaces.

La toise carrée 1^{TT} est un carré dont le côté a une toise de longueur.

Le pied carré ou 1^{PP} est un carré dont le côté a un pied de longueur.

Le pouce carré ou 1^{pp} est un carré dont le côté a un pouce de longueur.

La ligne carrée ou 1^{ll} est un carré dont le côté a une ligne de longueur.

Le point carré ou $1^{pt\,pts}$ est un carré dont le côté a un point de longueur.

Pour faciliter les calculs, on a été obligé d'établir encore les subdivisions suivantes :

Une toise-pied ou 1^{TP} est un rectangle qui a une toise de base et un pied de hauteur.

Une toise-pouce ou 1^{Tp} est un rectangle qui a une toise de base et un pouce de hauteur.

Une toise-ligne ou 1^{Tl} est un rectangle qui a une toise de base et une ligne de hauteur.

Une toise-point ou 1^{Tpts} est un rectangle qui a une toise de base et un point de hauteur.

D'où l'on conclut :

$$1^{TT} = 36^{PP} = 5184^{pp} = 6^{TP} = 72^{Tp}$$
$$1^{PP} = 144^{pp} = \tfrac{1}{6}^{TP} = 2^{Tp}$$
$$1^{pp} = 144^{ll} = 2^{Tpts}$$
$$1^{ll} = 144^{ppts}$$
$$1^{TP} = 12^{Tp} = \tfrac{1}{6}^{TT} = 6^{PP} = 864^{pp}$$
$$1^{Tp} = 12^{Tl} = \tfrac{1}{2}^{PP} = 72^{pp}$$
$$1^{Tl} = 12^{Tpts} = 6^{pp} = 864^{ll}$$
$$1^{Tpts} = \tfrac{1}{2}^{pp} = 72^{ll}$$

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'évaluer l'aire d'un rectangle ayant :

$10^{T}.\,4^{P}.\,6^{p}.\,3^{l}.\,2^{pts}$ h^{teur} ; $3^{T}.\,4^{P}.\,0^{p}.\,7^{l}.\,11^{lps}$ base,

On peut réduire les deux facteurs en points; multiplier les nombres ensemble, et on aura pour produit des points carrés. On divise ce produit par 144 pour avoir les lignes carrées; on divise ce premier quotient encore par 144, on aura les pouces carrés; le deuxième quotient encore par 144, on aura les pieds carrés, et ensuite ce troisième quotient par 36, on obtiendra 4 toises carrées; et, faisant attention aux restes, on saura combien le rectangle contient de toises carrées, de pieds carrés, de pouces carrés, etc.; mais cette méthode est extrêmement pénible à cause des grands nombres qu'il faut multiplier ensemble et des fréquentes divisions qu'il faut faire; on préfère le procédé suivant, qui permet l'emploi si commode des parties aliquotes. Le multiplicateur, dans l'exemple donné, renfermant cinq espèces d'unités, on conçoit le rectangle décomposé d'abord en 5 rectangles, ayant mêmes hauteurs que le rectangle total, et pour bases :

	base.	hauteur.	
Le 1er rectangle	3^T	10. 4. 6. 3. 2	(A)
2e	4^p	*idem.*	(B)
3e	0^p	*idem.*	(C)
4e	7^l	*idem*	(D)
5e	11_{pts}	*idem.*	(E)

et il est évident que la somme des aires de ces rectangles est égale à l'aire cherchée.

Maintenant, il s'agit de décomposer chacun de ces 5 rectangles en une suite d'autres, tels que l'aire de l'un puisse toujours servir à calculer facilement l'aire du rectangle suivant; ce qui est facile en considérant que les subdivi-

sions de la toise carrée, en toises-pieds, toises-pouces, etc., sont les mêmes que celles de la toise simple en pieds, pouces, lignes; par conséquent on peut employer les mêmes parties aliquotes.

Faisant le calcul du rectangle A

$10^T.4^P.6^p.3^l.2^{pts}$
3

30^{TT}

1.3^{TP}	pour $3^p = \frac{1}{2}^T$; rect. de 3^T sur $\frac{1}{2}^T$
0.3	$1^P = \frac{1}{3}3^p$; rect. de 3^T sur 1^P
$0.1.6^{Tp}$	$6^P = \frac{1}{2}^P$
$0.0.0.9^{Tl}$	$3^l = \frac{1}{24}6^p$
$0.0.0.0.6^{Tpts}$	$2^{pts} = \frac{1}{18}3^l$

La somme de ces 5 rectangles donne le rectangle A;

Venons au rectangle (B)

$10^T.4^P.6^P.3^l.2^{pts} = H$
0.4

$5^{TT}.2^{TP}.3^{Tp}.1^{Tl}.7^{Tpts}$ pour $3_P = \frac{1}{2}T$; rect. de H sur $\frac{1}{2}^T$

$1.4.9.0.6\frac{1}{3}$ $\qquad 1^P = \frac{1}{3}3^P$

De ce dernier rectangle, on déduira celui qui a pour hauteur H et pour base 1 pouce; on s'en servira comme rectangle auxiliaire pour calculer l'aire de H sur 6 lignes, et ainsi de suite; mais au lieu de faire ces calculs isolément, on les fait ensemble, en les disposant de la manière suivante, et en procédant comme en arithmétique :

$3^{T}.\,4^{P}.\,0^{P}.\,7^{l}.\,11^{pts}$
$10.\;\;4.\;\;6.\;\;3.\;\;2.$

30^{TT}

A	(3^{P})	1.3^{TP}
	(1^{P})	0.3
	(6^{P})	$0.1.6^{Tp}$
	(3^{l})	$0.0.0.9^{Tl}$
	(2^{pts})	$0.0.0.0.6^{Tpts}$
B	3^{P}	$5.2.3.1.7$
	$1P$	$1.4.9.0.6\frac{1}{3}$
D	6^{l}	$0.0.5.4.6\frac{19}{72}$
	1^{l}	$0.0\;0.10.9\frac{19}{432}$
E	6^{pts}	$0.0.0.5.4\frac{451}{864}$
	3	$0.0.0.2.8\frac{451}{1728}$
	2	$0.0.0.2.9\frac{1315}{2592}$

$39^{TT}.3^{TP}.2^{Tp}0^{Tl}.8^{Tp}\frac{4829}{5184}$
$6\;\;.\frac{1}{2}\;\;.6\;\;.\frac{1}{2}$

$39^{TT}\;.\;18^{TT}\;.\;0^{PP}$
$1\;\;.\;4\frac{4829}{5184}$

$39^{TT}.19^{PP}.4^{PP}\frac{4829}{5184}{}^{Tpts} = 39^{TT}.19^{PP}.4^{PP}.67^{ll}.10^{ppts}$

Le rectangle C est nul.

On a réduit les ^{TP} et les ^{Tp} en ^{PP}, en multipliant les uns par 6 et les autres par $\frac{1}{2}$; de même pour réduire les toises-lignes et les toises-pouces carrés (*voyez* le tableau, page 89). Si l'on avait à réduire $3^{TP}.\,5^{Tp}.\,7^{Tl}.\,5^{pts}$, on disposerait ainsi le calcul :

$$0^{TT} \,.\, 3^{TP} \,.\, 5^{Tp} \,.\, 7^{Tl} \,.\, 5^{Tpts}$$
$$6 \quad .\, \tfrac{1}{2} \quad .\, 6 \quad \tfrac{1}{2}$$

$$0^{TT} \,.\, 18^{PP} \,.\, 72^{PP} \,.\, 72^{ll}$$
$$2 \quad .\, 42$$
$$2$$

$$0 \,.\, 20^{PP} \,.\, 116^{PP} \,.\, 72^{ll}$$

car la moitié de 1^{PP} vaut 72^{PP}.

Il est facile de juger, d'après cet exemple, combien est pénible le calcul des aires d'après l'ancien système ; tandis qu'il ne présente aucune difficulté dans le nouveau système ; il est même souvent plus expéditif de réduire d'abord les toises, pouces, etc., en mètres, faire le calcul des aires, d'après ce système, sauf à réduire ensuite les mètres carrés en toises carrées, pieds carrés, etc., lorsqu'on en a besoin. (*Voir* table 3.)

Aires des triangles ; rapport de ces aires entre elles.

198. On nomme *hauteur* d'un triangle, la perpendiculaire abaissée d'un sommet sur le côté opposé, qui prend le nom de *base* ; chacun des côtés pouvant servir de base, il s'ensuit que tout triangle a trois hauteurs et trois bases correspondantes ; dans le triangle rectangle, deux de ces hauteurs se confondent avec les côtés de l'angle droit ; quand le triangle est isoscèle, deux de ces hauteurs sont égales, et réciproquement ; les trois hauteurs sont égales dans le triangle équilatéral ; dans tout autre cas, elles sont inégales.

Dans le triangle isoscèle, les trois hauteurs

se rencontrent évidemment en un même point. Nous démontrerons que cette propriété est commune à tous les triangles. Ce point de rencontre est situé dans l'intérieur d'un triangle acutangle, sur le sommet de l'angle droit dans les triangles rectangles et au dehors lorsqu'il y a un angle obtus.

199. (*Fig.* 43.) *L'aire du triangle rectangle* ABC *est égale à la moitié du produit des deux côtés* AB, AC, *de l'angle droit*. Car le triangle est la moitié du rectangle ABCD.

Si AB = 4 mètres,
AC = 6 mètres,

l'aire du triangle rectangle ABC est de 12 mètres carrés.

200. *L'aire du triangle quelconque* ABC *est égale à la moitié du produit d'une base* AB *par la hauteur correspondante* CD. (*Fig.* 43 *bis.*)

Le triangle ABC est la somme des deux triangles rectangles ACD, BCD; l'aire du triangle rectangle ACD est égale à $\frac{1}{2}$ AD $\times$ CD; celle du triangle rectangle BCD est égale à $\frac{1}{2}$ BD $\times$ CD; donc aire ACD $= \frac{1}{2}$ CD (AD+BD) $= \frac{1}{2}$ CD . AB.

201. Si A ou B est obtus, le point D tombe hors du triangle ACB qui est alors égal à la différence de deux triangles rectangles; ce qui ne change rien à la conclusion de la proposition précédente, on conclut immédiatement:

1° *Dans le même triangle, les bases sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs respectives*, c'est-à-dire que l'on a cette proportion : une première base est à une seconde base comme la hauteur correspon-

dante à cette base est à la hauteur correspondante à la première.

2° L'aire d'un triangle est plus petite que la moitié du produit de deux côtés lorsqu'ils ne sont pas à angle droit et plus grands que la moitié du produit de deux hauteurs.

3° L'aire d'un triangle est plus petite que la moitié de la racine cubique du produit des trois côtés élevés au carré; et plus grande que la moitié de la racine cubique du produit des trois hauteurs élevées au carré.

4° Lorsque deux triangles ont des bases égales, les aires sont proportionnelles aux hauteurs, et lorsque les hauteurs sont égales, les aires sont proportionnelles aux bases.

202. *Lorsque deux triangles* ABC, ADE, *ont un angle* A *égal ou en commun, leurs aires sont proportionnelles aux produits des côtés qui comprennent l'angle.* (*Fig.* 44.)

Soit menée la droite CD; comparons les aires des triangles ABC, ADE à l'aire du triangle ACD; les triangles ABC, ACD, ont pour hauteur commune la perpendiculaire qu'on abaisserait de C sur AB; donc (201.)

Aire ABC : aire ACD : : AB : AD,

et par la même raison

aire ACD : aire ADE : : AC : AE; donc

aire ABC : aire ADE : : AB $\times$ AC : AD $\times$ AE :

c. q. f. d.

Si la droite BC rencontre DE entre D et E, la démonstration et la conclusion restent les mêmes.

203. Si la droite BC est parallèle à la droite DE, les angles B et C sont respectivement égaux aux angles D et E; ainsi, en vertu de

la proposition précédente, on a aire ABC : aire ADE : : AB × AC : AD × AE : : AB × BC : AD × DE : : AC × BC : AE × DE ;
d'où l'on tire

AC : BC : : AE : : DE et,
AB : BC : : AD : DE
AB : AC : : AD : AE

204. On nomme triangles *équiangles,* ceux qui ont leurs trois angles égaux, chacun à chacun, et il suffit pour cela qu'ils aient seulement deux angles égaux ; d'après cette définition, les trois proportions précédentes peuvent s'énoncer ainsi : *deux triangles équiangles ont les côtés opposés aux angles égaux, respectivement proportionnels.*

Dans deux triangles *équiangles*, on nomme *côtés homologues* ceux qui sont opposés à des angles égaux ; cette définition admise, la proportion s'énonce ainsi : *deux triangles équiangles ont les côtés homologues proportionnels.*

Exemple : si AB est la moitié de AD, AC sera la moitié de AC, et BC la moitié de DE.

205. De la proportion AB : AC : : AD : AE, on déduit celle-ci :

AD — AB : AB : : AE — AC : AC, ou bien
BD : AB : : CE : AC.

Cette dernière proportion s'énonce ainsi :

Lorsqu'une droite est parallèle à un côté d'un triangle, elle coupe les deux autres côtés en segmens proportionnels.

Cette proposition a même lieu lorsque la parallèle BC est dans l'angle opposé à l'angle DAE ; elle coupe alors les côtés AD, AE, prolongés en *segmens soustractifs*. (Note 4.)

206. Quelque grandeur qu'atteigne AD et

AE, pourvu que la droite DE reste parallèle à BC, le rapport de ces grandeurs reste constamment égal au rapport de AB à BC ; c'est dans ce sens que l'on dit, usant d'une locution elliptique, que deux quantités *infiniment grandes*, peuvent avoir entre elles un rapport géométrique *fini ;* il en est de même de deux quantités *infiniment petites.*

207. La proposition précédente (205) a une réciproque vraie; *lorsqu'une droite coupe deux côtés d'un triangle en segmens proportionnels, elle est parallèle au troisième côté.* (*Fig.* 44.)

En effet, si l'on a la proportion AB : BD :: AC : AE, on en déduit :

AB : AD :: AC : AE

Si BC n'est pas parallèle à DE, alors par le point B passera une parallèle qui coupera AE en un point I différent de C ; on aura donc (205)

AB : AD :: AI : AE.

Il faut donc que l'on ait AI = AC et que le point I se confonde avec C.

208. On énonce quelquefois cette réciproque sous la forme suivante : *deux triangles qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont équiangles.* En effet, soient les deux triangles ABC, ADE (*fig.* 44.) ayant l'angle A égal chacun à chacun ; et de plus la proportion AB : AD :: AC : AE.

On peut toujours placer les deux triangles de manière à avoir l'angle A en commun ; et dans cette position, à cause de la proportion, la droite BC devient parallèle à DE (207) ; par conséquent l'angle B sera égal à l'angle D, et

l'angle C à l'angle E. Et en vertu de la proposition (104), on aura AB : AD :: BC : DE.

209. La proposition (204) a une réciproque ; savoir : *deux triangles qui ont les trois côtés proportionnels, sont équiangles.* En effet, soient les deux triangles ABC, *abc* ; et les trois proportions AB : *ab* :: AC : *ac* :: BC : *bc*.

Construisons un troisième triangle avec les côtés AB, AC comprenant l'angle *a*, soit ce troisième triangle A'B'C', et A'B' = AB ; A'C' = AC ; A' = *a*.

On a donc A'B' : A'C' :: *ab* : *ac* ; donc les deux triangles A'B'C' et *abc* sont équiangles (208), et A'B' : B'C' :: *ab* : *bc*, ou comme AB : BC.

Mais AB = A'B' ; donc BC = B'C', ainsi le triangle A'B'C' est égal au triangle ABC ; donc ce dernier triangle est aussi équiangle au triangle *abc*, c. q. f. d.

Observation. C'est au lecteur à construire la figure pour cette démonstration.

210. (*Fig.* 45.) Deux triangles DEF, ABC, qui ont les côtés parallèles, savoir, AB à DE ; AC à DF ; BC à EF, sont évidemment équiangles entre eux (88) ; donc les côtés homologues sont proportionnels ; les côtés parallèles sont homologues. Il est évident que lorsque deux triangles sont équiangles, on peut les placer d'une infinité de manières dans une position telle que leurs côtés homologues soient parallèles.

Il est facile de démontrer que dans cette position les droites AD, BE, CF, qui joignent les sommets des angles égaux étant prolongées passent par un même point O, qu'on nomme *centre de similitude*.

211. (*Fig.* 46.) Si les triangles DEF, ABC, ont

les côtés perpendiculaires, chacun à chacun, savoir : DF sur AC ; DG sur AB ; EF sur BC ; les triangles sont équiangles (98) et les côtés perpendiculaires sont homologues. Dans toute autre position que celle qui est représentée dans la figure, le triangle DEF aurait nécessairement les côtés parallèles à ceux du triangle de la position actuelle ; il sera donc toujours équiangle au triangle BAC (210).

212. Enoncé de quelques propositions à démontrer :

1° Si dans deux triangles ABC, *abc*, l'angle A est supplément de l'angle *a*, l'aire du premier triangle est à celle du second comme AB × AC : *ab* × *ac*.

2° Si les aires de deux triangles sont entre elles comme les produits respectifs de deux côtés, les angles compris sont ou égaux ou supplémentaires.

3° Si entre deux triangles ABC, *abc*, on a la proportion AB : *ab* :: AC : *ac*.

Et de plus l'angle C opposé à AB égal à l'angle *c* opposé à *ab*.

Alors les angles B et *b* sont ou égaux ou supplémentaires.

4° Si dans les triangles ABC, *abc*, on a C = *c* et B + *b* = 2q ; on aura la proportion AB : *ab* :: AC : *ac*.

Triangles rectangles équiangles ; théorème dit de Pythagore.

213. (*Fig.* 47.) *Le triangle* ABC, *rectangle en* A, *est divisé par la perpendiculaire* AP *sur l'hypothénuse, en deux triangles* APB, APC, *équiangle chacun au triangle* ABC, *et par conséquent équiangles entre eux.*

214. Comparons les côtés homologues des trois triangles :

triangles ABC; AB, BC, AC,
ABP; BP, AB, AP,
ACD; AP, AC, CP,

les lignes écrites dans une même colonne verticale sont homologues. On peut tirer de là six proportions; il n'y en a que trois de remarquables; les voici :

$$BP : AB :: AB : BC; \quad \text{d'où} \quad \overline{AB}^2 = BP \times BC$$

$$CP : AC :: AC : BC; \quad \overline{AC}^2 = CP \times BC$$

$$BP : AP :: AP : CP; \quad \overline{AP}^2 = BP \times CP$$

Les deux premières proportions sont renfermées dans cet énoncé : *chaque côté de l'angle droit est une moyenne proportionnelle entre l'hypothénuse et le segment adjacent*, ou bien encore le carré construit sur un côté de l'angle droit est équivalent au rectangle construit sur l'hypothénuse et le segment adjacent.

La troisième proportion s'énonce ainsi : *la perpendiculaire abaissée sur l'hypothénuse est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de l'hypothénuse*, ou bien encore le carré construit sur la perpendiculaire est équivalent au rectangle construit sur les deux segmens de l'hypothénuse.

215. L'on a, en faisant la somme de $\overline{AB}^2$ et de $\overline{AC}^2$ (214).

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BP \times BC + CP \times BC = BC\,(BP + CP) = BC \times BC = \overline{BC}^2.$$

Ainsi, *le carré construit sur l'hypothénuse est équivalent à la somme des deux carrés construits sur chaque côté de l'angle droit.*

Cette proposition est connue sous le nom de théorème de Pythagore.

Aires des polygones, des parallélogrammes, des trapèzes, et propriétés des carrés.

216. Pour avoir l'aire d'un polygone, on prend un point quelconque dans l'intérieur du polygone; de ce point, on mène des droites aux sommets du polygone; sa surface sera partagée en autant de triangles qu'il y a de côtés; on cherche l'aire de chaque triangle; la somme de ces aires est celle du polygone. On peut aussi faire partir les lignes de divisions d'un sommet du polygone, ou d'un point situé sur un côté, ou même hors du polygone; dans ce dernier cas, il y a des triangles dont les aires doivent être soustraites.

217. De là on conclut que dans un polygone *équilatéral*, la somme des distances d'un point quelconque pris dans son plan, à tous les côtés, est une longueur constante. Lorsque le point est hors du polygone, il y a des distances *soustractives*.

218. L'aire d'un parallélogramme est égale à un de ses côtés, multiplié par sa distance au côté parallèle; car la diagonale partage le parallélogramme en deux triangles égaux. On désigne quelquefois cette distance sous le nom de *hauteur;* alors le côté prend le nom de base; et l'on dit alors que l'*aire d'un parallélogramme est égale au produit de la base par la hauteur.*

219. Les conclusions 1°, 2°, 4° du n°. 201 et le n°. 202 sont aussi applicables aux parallélogrammes.

On peut aussi démontrer *par superposition* que deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalens.

220. (*Fig.* 48.) Tout carré peut être divisé d'une infinité de manières en deux rectangles égaux et en deux carrés; en effet, par un point quelconque O pris sur la diagonale AE du carré ACEG, soient menées HD parallèle à AC et BF parallèle à AG; il est facile de démontrer que GHOF et BCDO sont deux rectangles égaux, et que FOED, HOBE, sont deux carrés.

Cette proposition s'écrit ainsi :

$$\overline{AC}^2 = (AB + BC)^2 = \overline{AB}^2 + OD^2 + HO \times FO + BO \times DO = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB.BC.$$

Il est facile de démontrer que la somme des deux rectangles est toujours plus petite que la somme de deux carrés; elles sont égales lorsque le point O est le milieu de la diagonale. La proposition précédente s'énonce ainsi : *le carré fait sur la somme de deux lignes est égale à la somme des carrés construits sur chacun, plus le double du rectangle formé avec ses lignes.*

221. (*Fig.* 48.) Prolongeons GE d'une quantité GK = FE et la ligne HD de HL = FE; la figure GHLK est un carré égal au carré FEDO; et le rectangle BCEF = le rectangle FOLK; on a donc

$$ABOH = ACEG + GHLK - 2.BCEF;$$

or le rectangle BCEF a pour aire BC $\times$ CE ou bien BC $\times$ AC; donc

$$\overline{AB}^2 = (AC - BC)^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC.AC,$$

ce qu'on énonce ainsi : *le carré construit sur la différence de deux lignes est égale à la*

somme des carrés construits respectivement sur chacune, moins le double du rectangle formé avec ces lignes.

222. (*Fig.* 48.) Achevons le rectangle HLMA; il est égal au rectangle HGFO; on a donc

$$\text{ACEG} - \text{FODE} = \text{LMCD} = \text{LM} \times \text{MC} = \text{AB} \times (\text{AC} + \text{BC}), \quad \text{ou bien}$$

$$\overline{\text{AC}}^2 - \overline{\text{BC}}^2 = (\text{AC} - \text{BC})(\text{AC} + \text{BC}),$$

c'est-à-dire, *la différence des deux carrés est égale à la différence des deux côtés multipliés par la somme des deux côtés.*

Les trois propositions 240, 241, 242. se trouvent facilement par le calcul algébrique.

223. (*Fig.* 49.) Le théorème de Pythagore étant très-important, nous en donnons ici une nouvelle démonstration uniquement fondée sur la superposition des figures.

L'angle BAG étant droit, construisant le carré ABCD et le carré AEFG, menant les deux hypothénuses BG, DE, la somme des deux carrés sera équivalente à l'hexagone CDEFGB, moins les deux triangles rectangles égaux ABG, ADE; construisant le carré BGLM, et sur LM le triangle LMN égal à ABG et dans une position renversée, on aura un second hexagone BAGMNL équivalant au premier. En effet, menons AN et les diagonales CA, AF formant la droite CAF; les quadrilatères CDEF, AGMN, sont égaux, car MN = CD; angle NMG = angle CDE; GM = DE; angle MGA = DEF; EF = AG. On prouve de même que les quadrilatères ABLN, CBGF sont égaux, donc les deux hexagones sont équivalens; retranchant de chacun les triangles égaux, il

reste d'un côté la somme des deux carrés AC, AF, et de l'autre le carré GL; donc on a

$$BGLM = ABCD + AGEF,$$

ou $$BG^2 = AB^2 + AG^2;$$

ce qu'on énonce ainsi:

Ce théorème célèbre, que l'antiquité attribue à Pythagore, porte le nom de ce philosophe; il énonce une des plus belles et des plus importantes propriétés de l'espace; la démonstration que l'on vient d'en donner est très-simple, et l'on pourra démontrer cette proposition par une transposition de figures, telle qu'on l'exécute dans le jeu des énigmes chinoises (note 5).

On démontre facilement que 1° les triangles CBG, ABL sont égaux; 2° le premier triangle est la moitié du carré ABCD et le second triangle est la moitié du rectangle BIKL qu'on forme en abaissant de A la perpendiculaire AIK sur BG et LM; donc le carré est équivalent au rectangle; on démontre de même que le carré AGFE est équivalent au rectangle GIKM; donc la somme des deux carrés est équivalente au rectangle entier BGLM, — on est invité de tirer les lignes indiquées. C'est ainsi qu'Euclide démontre cette célèbre proposition, qui est la quarante-septième de son premier livre.

224. (*Fig.* 50.) Prenons entre A et G un point quelconque R, et menons BR; AG étant divisé en deux segmens additifs, l'on a

$$AG^2 = AR^2 + GR^2 + 2GR.\,AR \ (240);$$

donc $$BG^2 = AB^2 + AG^2 = AB^2 + AR^2 + GR^2 + 2GR.\,AR;$$

or $$AB^2 + AR^2 = BR^2 \ (215);$$

donc $$BG^2 = BR^2 + GR^2 + 2GR.\,AR.$$

Dans le triangle BRG, l'angle R est essentiellement obtus; le carré construit sur le côté BG opposé à l'angle obtus est donc plus grand que la somme des carrés BR^2, GR^2, construits sur les deux autres côtés.

Si l'on prend R' au delà de A, la droite AG étant alors divisée en deux segmens soustractifs, on aura

$$AG^2 = AR'^2 + GR'^2 - 2GR'.AR'$$

$$\text{et } BG^2 = AB^2 + AR'^2 + GR'^2 - 2GR'.AR'$$
$$= BR'^2 + GR'^2 - 2GR'.AR';$$

dans le triangle BR'G, l'angle R' est aigu. Le carré construit sur BG, côté opposé à l'angle aigu, est donc plus petit que la somme des carrés construit sur les deux autres côtés.

Les deux résultats obtenus s'énoncent ainsi:

Dans tout triangle obtusangle, le carré du côté opposé à l'angle obtus est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, *plus* deux fois le rectangle construit sur un de ces côtés et sur son segment adjacent à l'autre côté et formé par la perpendiculaire abaissée du sommet opposé.

Dans tout triangle le carré d'un côté opposé à un angle aigu, est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, *moins* deux fois le rectangle construit sur un de ces côtés et sur son segment adjacent à l'autre côté.

On conclut de là immédiatement que lorsque dans un triangle le carré d'un premier côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, l'angle opposé au premier côté est droit, et le triangle est rectangle. C'est la réciproque du théorème de Pythagore.

Cette réciproque est la dernière proposition

du premier livre d'Euclide : il le démontre directement de cette manière ; si l'on a $AB^2 + AG^2 = BG^2$, l'angle A est nécessairement droit (*Fig.* 49) ; en effet si A n'est pas angle droit, construisons un second triangle rectangle, et ayant AB et AG pour les deux côtés de l'angle droit, il est évident que l'hypothénuse de ce triangle sera égale au côté BG ; donc les deux triangles sont égaux ; donc, etc.

225. (*Fig.* 49 *bis.*) Si dans le triangle ABC on mène les lignes BP, BO, l'une perpendiculaire sur AC, l'autre au milieu O de cette ligne, on aura (244)

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 + 2 . AO . OP,$$

à cause de l'angle obtus BOA ;

$$BC^2 = CO^2 + BO^2 - 2 . CO . OP,$$

à cause de l'angle aigu BOC.

Ajoutant, l'on obtient

$$AB^2 + BC^2 = 2 AO^2 + 2 . BO^2 ;$$

car $AO = CO$;

d'où $2 AB^2 + 2 BC^2 = 4 AO^2 + 4 . BO^2 = AC^2 + 4 . BO^2$;

résultat qui s'énonce ainsi :

Deux fois la somme des carrés des côtés d'un triangle est égale au carré du troisième côté ; plus, quatre fois le carré de la droite qui va du milieu de ce côté au sommet opposé.

Ainsi le carré d'un côté d'un triangle est toujours plus petit que deux fois la somme des carrés des deux autres côtés.

226. Dans la quadrilatère ABCD, si nous menons la droite DO, on aura de même

$$AD^2 + CD^2 = 2 AO^2 + 2 DO^2,$$

donc $AD^2 + BC^2 + AD^2 + CD^2 = 4 . AO^2 + 2 . BO^2 + 2 DO^2 = AC^2 + 2 . BO^2 + 2 DO^2$;

Soit I le milieu de BD, on a donc,

$$2\,\overline{BO}^2 + 2\,.\,\overline{DO}^2 = \overline{BD}^2 + 4\,.\,\overline{OI}^2$$

Ainsi dans tout quadrilatère la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la droite qui joint les points milieux de ces diagonales. Cette proposition a été donnée par Euler dans les mémoires de l'Académie de Pétersbourg. (Carnot. *Géométrie de position*, pag. 328.)

Lorsque le quadrilatère est un parallélogramme, les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales, et leur point d'intersection se confond avec le point O; dans ce cas seulement, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales.

Dans tout quadrilatère les quatre points milieux sont les sommets d'un parallélogramme dont l'aire est la moitié de celle du quadrilatère; cette propriété est due à Roberval.

Propriétés des transversales.

227. (*Fig.* 5.) Deux triangles AEF, ABC, ont l'angle A en commun; EF n'étant pas parallèle à BC, si on le prolonge, il partage le côté BC en deux segmens soustractifs BG, CG, de même qu'il divise AB et AC chacun en deux segmens additifs; or, il existe entre les six segmens une propriété remarquable, qu'il est important de connaître. Menons les droites BF, CE; les triangles AEF, BEF, ayant même sommet F, et même hauteur, sont entre eux comme les

segmens AE, BE, qui leur servent de base (201); de sorte que l'on a

$$\frac{AEF}{BEF} = \frac{AE}{BE};$$

et de même $$\frac{CEF}{AEF} = \frac{CF}{AF};$$

d'où l'on tire, en multipliant,

$$\frac{CEF}{BEF} = \frac{AE \,.\, CF}{BE \,.\, AF}.$$

Mais les triangles CEF, BEF ayant même base EF, sont entre eux comme leurs hauteurs (201) BQ, CP; et ces hauteurs étant parallèles, l'on a BQ : CP :: BG : CG;

donc $$\frac{CEF}{BEF} = \frac{CG}{BG},$$

$$\frac{AE \,.\, CF}{BE \,.\, AF} = \frac{CG}{BG},$$

d'où AE . BG . CF = BE . CG . AF (A).
Si l'on prend les six segmens, de manière à ce qu'on passe d'un segment au segment adjacent, on aura cet ordre, AE, EB, BG, GC, CF, FA.

L'égalité (A) peut donc s'énoncer ainsi : le produit des segmens d'un rang pair est égal au produit des segmens d'un rang impair, en prenant ces segmens dans le même ordre. En général, la même lettre ne doit pas être répétée dans le même produit.

Dans le produit des trois lignes, on suppose que chacune est rapportée à l'unité de mesure, et exprimée par un nombre.

On nomme *transversale* une droite EFG qui coupe les trois côtés d'un triangle ABC, cha-

cun en deux segmens ; un des côtés est toujours coupé en segmens *soustractifs*, mais ils peuvent l'être tous les trois. Par exemple, la droite CBG coupe les trois côtés du triangle AEF en segmens soustractifs, AB, BE, EG, GF, FC, CA, et l'on aura aussi

$$AB \,.\, EG \,.\, FC = BE \,.\, GF \,.\, CA \,.$$

La réciproque de cette proposition est que, lorsque les trois côtés d'un triangle sont partagés chacun en deux segmens, tels qu'en les prenant par ordre le produit des trois segmens d'un rang pair est égal au produit des segmens d'un rang impair, les trois points de division sont sur une même droite.

On se sert avec beaucoup d'avantage de cette propriété, dans la géométrie pratique (Voyez le *Manuel d'Arpentage*), pour trouver sur le terrain trois points qui soient en ligne droite, qui soient *alignés*.

228. (*Fig.* 51.) Les trois droites BIF, CIE, AIO passant par le même point I, partagent les côtés du triangle chacun en deux segmens additifs, entre lesquels existe la même relation qu'entre les segmens formés par la transversale.

En effet, les six triangles ayant pour bases ces segmens, et pour sommet commun le point I, donnent les proportions

$$\frac{AIE}{BIE} = \frac{AE}{BE},$$

$$\frac{CIF}{AIF} = \frac{CF}{AF},$$

$$\frac{BIO}{OIC} = \frac{BO}{CO}.$$

Multipliant ces trois équations, il vient

$$\frac{AIE.CIF.BIO}{BIE.AIB.OIC}=\frac{AE.CF.BO}{BE.AF.OC};$$

or

$$\frac{AIE}{OIC}=\frac{AI.IE}{OI.IC},$$

car ces deux triangles ayant un angle égal, opposé par le sommet, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle; et par la même raison l'on a

$$\frac{CIF}{BIE}=\frac{IC.IF}{BI.IE}$$

$$\frac{BIO}{AIF}=\frac{BI.IO}{AI.IF}.$$

Multipliant ces trois égalités ensemble, on obtient

$$\frac{AIE.CIF.BIO}{OIC.BIE.AIF}=\frac{AI.IE.CI.IF.BI.IO}{OI.IC.BI.IE.AI.IF}=1;$$

donc aussi $\frac{AE.CF.BO}{BE.AF.CO}=1$,

et $AE.CF.BO=BE.AF.CO$ (B).

Cette propriété existe également lorsque le point I est hors du triangle; il y a alors des segmens qui deviennent soustractifs.

Il est facile de démontrer la réciproque; savoir, si l'on prend trois points de division E, F, O, sur les trois côtés d'un triangle, tels que les segmens remplissent la condition énoncée en (B), les trois droites AO, BF, CE, passent nécessairement par le même point I.

Propriétés harmoniques.

229. En divisant l'un par l'autre les membres des équations (A) (p. 108) et (B), il vient

$$\frac{AE \, . \, BG \, . \, CF}{AE \, . \, CF \, . \, BO} = \frac{BE \, . \, CG \, . \, AF}{BE \, . \, AF \, . \, CO};$$

d'où l'on tire, en simplifiant les fractions,

$$\frac{BG}{BO} = \frac{CG}{CO};$$

ou bien $BG \, . \, CO = BO \, . \, CG$ (C).

La droite BG est divisée en trois segmens additifs, BG, BO, CO; BO est le segment moyen; BG et CO sont les segmens extrêmes; la propriété (C) peut donc s'énoncer ainsi :

La droite GC est partagée en trois segmens additifs, tels que le produit du segment moyen par la ligne entière est égal au produit de deux segmens extrêmes.

Toutes les fois qu'une droite est divisée en trois segmens additifs ayant entre eux cette relation, on dit que la droite est divisée *harmoniquement* (note 6), et la proportion fondée sur cette relation, savoir, BG : CG : : BO : CO est une proportion *harmonique*.

230.

$$\frac{CG}{BG} = \frac{BC + BG}{BG} = 1 + \frac{BC}{BG}$$

comme BC a toujours même grandeur, il s'ensuit que ce rapport varie avec BG; si l'on suppose donc que la transversale EFG tourne autour du point E, et que l'intersection G aille sans cesse en s'éloignant, BG croîtra indéfiniment;

le rapport $\frac{BC}{BG}$ ira sans cesse en diminuant, et le rapport $\frac{CG}{BG}$ s'approchera de plus en plus d'être égal à l'unité ; donc aussi le rapport $\frac{BO}{CO}$, égal à $\frac{BG}{CG}$, s'approche de la même limite ; elle est atteinte lorsque la transversale devient parallèle à BC ; alors donc $\frac{BO}{CO} = 1$, ou $BO = CO$; et le point O est au milieu de BC ; de là on déduit cette propriété.

(*Fig.* 50 *bis.*) Lorsqu'on divise un triangle ABC en trapèzes par des droites EF, KL, MN, menées comme on voudra, parallèlement à la base BC, les points d'intersection I, I, I, des diagonales de ces trapèzes, sont rangés sur une même droite, passant par les milieux des parallèles et par le sommet du triangle.

231. Supposons maintenant que la transversale tourne autour du point G (*fig.* 51) ; les points E, F, I, changeront sans cesse de position ; mais le point O sera fixe ; car, de la proportion harmonique, on tire celle-ci

$$BG + CG : BG :: BO + CO : BO ;$$

ou $$BG + CG : BG :: BC : BO ;$$

or, les trois premiers termes de cette proportion conservent même valeur quand toutes les transversales passent par le même point G ; donc aussi le quatrième terme BO ne changera pas : ainsi le point de division O est toujours le même, et la droite AO est fixe ; donc le

point I reste toujours sur une même droite ; de là cette propriété.

(*Fig.* 50 *ter.*) Lorsqu'on divise un triangle ABC en quadrilatères par des transversales EF, KL, MN, qui partent d'un même point G, les points d'intersection I, I, I, des diagonales des quadrilatères sont sur une même droite, passant par le sommet du triangle et divisant harmoniquement toutes les transversales.

Cette propriété et la précédente n'en forment proprement qu'une seule ; car on peut considérer les parallèles comme des transversales dont le point de rencontre est situé à l'infini (58).

M. Poncelet croit que cette belle proposition est due à Désargues. (Propriétés projectives, p. 89, note.) Elle a été démontrée par de La Hire dans son mémoire sur les propriétés des trapèzes ; par ce mot il désigne un quadrilatère quelconque. (Mémoire de l'académie des sciences, 1721, p. 231.)

On fait un grand usage de ces propositions dans la géométrie pratique pour prendre des alignemens, diviser une droite en parties égales, etc. (*Voyez* les ouvrages divers de MM. Servois et Brianchon.)

232. (*Fig.* 51 *bis.*) Si d'un point quelconque A situé hors d'une droite BG, divisée harmoniquement, on mène des droites AB, AO, AC, AG, aux points de division, on forme quatre triangles ABG, ABO, AOC, ACG, entre lesquels existe même relation qu'entre les segmens ; car les aires de ces triangles,

tous de même hauteur, sont entre elles comme leurs bases;

on a donc $$\frac{BG}{CG}=\frac{ABG}{ACG}$$

$$\frac{BO}{CO}=\frac{ABO}{ACO};$$

or $$\frac{BG}{CG}=\frac{BO}{CO}\ (229),$$

donc $$\frac{ABG}{ACG}=\frac{ABO}{AOC},$$

ou bien ABG . AOC = ABO . ACG (C), ce qu'il fallait démontrer. Menant dans l'angle BAG, une droite quelconque KLMN, on formera encore quatre triangles AKN, AKL, ALM, AMN, ayant respectivement un angle commun avec les quatre précédens;

on aura donc $$\frac{ABG}{AKN}=\frac{AB.AG}{AK.AN},$$

$$\frac{AOC}{ALM}=\frac{AO.AC}{AL.AM};$$

d'où en multipliant

$$\frac{ABG}{AKN}\cdot\frac{AOC}{ALM}=\frac{AB.AG.AO.AC}{AK.AN.AL.AM},$$

on prouvera de même que

$$\frac{ABO}{AKL}\cdot\frac{ACG}{AMN}=\frac{AB.AO.AC.AG}{AK.AL.AM.AN};$$

d'où $$\frac{ABG}{AKN}\cdot\frac{AOC}{ALM}=\frac{ABO}{AKL}\cdot\frac{ACG}{AMN}\ (D),$$

et à cause de l'équation (C),

$$AKN . ALM = AKL . AMN;$$

et comme les aires de ces triangles sont entre elles comme leurs bases,

on aura donc KN . LM = KL . MN (E).

Ainsi la droite KN est aussi divisée harmoniquement.

Les quatre droites qui vont d'un point A aux points de division et aux extrémités d'une droite divisée harmoniquement, forment un *faisceau harmonique;* la propriété (D) est donc susceptible de cet énoncé :

Toute droite interceptée dans un faisceau harmonique est divisée harmoniquement ; lorsque la droite interceptée est parallèle à un des côtés du faisceau, les deux segmens interceptés sont égaux (230).

Il est facile de démontrer que trois côtés d'un faisceau harmonique forment, avec le prolongement du quatrième côté, un second faisceau harmonique; et en les prolongeant tous les quatre, il est facile de comprendre qu'au moyen d'un seul faisceau harmonique, on peut s'en procurer sept autres; en effet, désignant les quatre côtés du faisceau donné par les nombres 1, 2, 3, 4, et leurs prolongemens respectifs par 5, 6, 7, 8; on aura ces 8 faisceaux harmoniques

1234; 2345; 3456; 4567;
5678; 6781; 7812; 8123.

233. (*Fig.* 51 *bis.*) Lorsque l'angle BAO est égal à l'angle OAC, les aires des deux triangles BAO, AOC, sont entre elles comme les rectangles AB . AO et AO . AC, ou comme les droites AB et AC; mais ces aires sont aussi comme les segmens BO et OC; donc on a

la proportion AB : AC : : BO : OC; ce résultat s'énonce ainsi :

La droite qui divise l'angle d'un triangle en parties égales, partage le côté opposé en deux segmens additifs, qui sont entre eux comme les côtés adjacens.

La droite AG, qui divise l'angle supplémentaire CAB′ en parties égales, partage aussi le côté BC en deux segmens soustractifs, qui sont entre eux comme les deux côtés du triangle; car l'angle GAB′ étant supplément de BAG, il s'ensuit que CAG, qui est égal à GAB′, sera aussi supplément de BAG; par conséquent

BAG : CAG : : AB . AG : AC . AG (212);
donc BAG : CAG : : AB : AC : : BG : CG ;
l'on a donc BG : CG : : BO : OC;
par conséquent les quatre droites AB, AO, AC, AG forment un faisceau harmonique, et AG est perpendiculaire sur AO.

234. (*Fig.* 51 *bis.*) Soit maintenant la droite BG divisée d'une manière quelconque en trois segmens additifs BO, OC, CG; la droite KN, interceptée dans le même angle, sera aussi divisée en trois segmens KL, LM, MN; les rapports des segmens extrêmes sont $\frac{KL}{BO}$, $\frac{CG}{MN}$; le rapport des segmens moyens et des lignes entières sont $\frac{LM}{OC}$, $\frac{KN}{BG}$, et l'on aura toujours

$$\frac{KL}{BO} \times \frac{MN}{CG} = \frac{LM}{OC} \times \frac{KN}{BG},$$

même moyen de démonstration que ci-dessus (232).

Si BG est partagé harmoniquement, alors on a $BO \times CG = OC \times BG$;

delà on conclut $KL \times MN = LM \times KN$,

et on retombe sur la propriété (D) (232).

Si BG est parallèle à KN, alors

$$\frac{KL}{BO} = \frac{AL}{AO} = \frac{LM}{OC} = \frac{AM}{AC} = \frac{MN}{CG} = \frac{AN}{CG}$$

Et ces dernières relations existent en quelque nombre de segmens que la droite soit partagée.

Ceux qui désirent plus de détails sur les propriétés harmoniques consulteront avec fruit le traité complet que M. Poncelet a publié en 1822 sur les propriétés projectives des figures.

Lignes proportionnelles considérées dans le cercle.

235. (*Fig* 52.) Deux cordes non parallèles se coupent réciproquement en deux segmens *additifs*, si le point d'intersection est dans l'intérieur de la circonférence; telles sont les cordes AB, CD. Les segmens sont *soustractifs* si le point d'intersection est hors de la circonférence; telles sont les cordes AC, BD, qui se coupent en I. Dans les deux cas, le produit des segmens d'une corde est égal au produit des deux segmens de l'autre corde.

Premier cas. Les angles A et D sont égaux (155); il en est de même des angles ABD et ACD; donc les deux triangles ACO, BOD, sont équiangles, et l'on a

$$\frac{CO}{BO} = \frac{AO}{OD}$$

d'où $$CO \times OD = AO \times BO.$$

La proportion peut s'énoncer ainsi : Le premier segment de la *première* corde est au premier segment de la *seconde* corde comme le second segment de la *seconde* corde est au deuxième segment de la *première* corde.

On dit alors que *les deux cordes se coupent en parties inversement ou réciproquement proportionnelles.*

Deuxième cas. Les deux triangles ABI, CID, sont équiangles ; car les angles A et D sont égaux, et l'angle I est commun; on a donc la proportion AI : DI : : BI : CI.

AI et CI sont les segmens soustractifs de la corde AC ; DI, BI, sont ceux de la corde BD ; ce résultat s'énonce ainsi :

Deux sécantes IA, IB, *partant d'un même point, sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures.*

236. Faisons tourner la sécante IBD autour du point I, jusqu'à ce qu'elle soit devenue tangente en M ; alors la partie ID devient égale à sa partie extérieure IB et l'on a

AI : MI : : MI . CI.

Donc si d'un même point l'on mène une tangente et une sécante, *la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure.*

On peut aussi démontrer cette proposition comme la précédente, en menant les droites MC, MA, et comparant les côtés homologues des triangles équiangles MCI, MAI.

Propriétés des quadrilatères et des triangles inscrits.

237. (*Fig.* 53.) IC, ID, IBA, étant deux tangentes et une sécante partant du même point I, si l'on mène des points de contact des droites aux points d'intersections de la sécante, on formera un quadrilatère tel, que le produit du premier et du troisième côté est égal au produit du deuxième et du quatrième côté. En effet, les deux triangles IBD, IDA, étant équiangles (156), l'on a

$$\frac{AD}{DB} = \frac{DI}{AI}$$

et les triangles CBI, CAI, étant aussi équiangles, l'on a

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CI}{AI},$$

mais

$$CI = DI;$$

donc

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$$

d'ou

$$AD \times CB = AC \times DB \ (1).$$

238. (*Fig.* 53.) On a

aire du triangle CBO $= \dfrac{CB.CO.BD}{4R}$ (241, p. 123); R est le rayon du cercle.

aire du triangle ACI $= \dfrac{IC.CA.CA}{4R}$

aire du triangle ACO $= \dfrac{CA.CO.AD}{4R}$

$$\text{aire du triangle BCI} = \frac{CB \,.\, IC \,.\, CB}{4R}$$

$$\text{d'où } CBO \,.\, ACI = ACO \,.\, BCI$$

à cause de l'équation (1) du paragraphe précédent, mais ces quatre triangles de même sommet, sont entre eux comme leurs bases. *Donc la sécante* IA *est divisée harmoniquement par la corde* CD, *qui réunit les points de contact.*

239. (*Fig.* 53 *bis.*) Soit maintenant ABCD, un quadrilatère inscrit quelconque ; faites l'angle MBD égal à l'angle CBO, les deux triangles CBA, MDB, étant équiangles, fournissent la proportion

$$BD : AB :: MD : AC;$$

d'où $$BD \times AC = AB \times MD.$$

Les triangles CMB et ABD étant équiangles, donnent

$$CB : AB :: CM : AD;$$

d'où $$CB \times AD = AB \times CM.$$

Ainsi $BD \times AC + CB \times AD = AB \times MD + AB \times CM = AB\ (MD + CM) = AB \times CD$

Ce résultat s'énonce ainsi :

Dans tout quadrilatère inscrit dans un cercle, la somme des produits des côtés opposés est égale au produit des deux diagonales. Ce théorème est connu sous le nom de *théorème de Ptolémée.*

La réciproque est vraie ; en effet soit ABCD un quadrilatère quelconque ; sur BD construisons un triangle BDP semblable au triangle ABC ; de sorte que BD soit homologue à BC ; DP à AC et BP à BC ; les deux triangles PBC

et ABD seront aussi semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, établissant des proportions comme ci-dessus on aura

$$BD \times AC + BC \times AD = AB\,(PD + PC)$$

or $$PD + PC > CD$$

Donc dans un quadrilatère non inscriptible le produit des diagonales est plus grand que la somme des produits des côtés opposés.

240. (*Fig.* 53.) Les angles ACB, ADB, étant supplémens l'un de l'autre, les aires des deux triangles ACB, ADB, sont entre elles comme les produits des côtés qui comprennent ces angles; mais, à cause de la base commune AB, ces aires sont entre elles comme les perpendiculaires abaissées de C et D sur cette base; perpendiculaires qui sont entre elles comme CO : OD.

Donc $$AC \times CB : AD \times DB :: CO : OD;$$

d'où $$AC \times CB + AD \times DB : AC \times CB :: CD : CO.$$

On aura de même

$$CB \times DB + AD \times AC : CB \times DB :: AB : BO;$$

de là $$\frac{AC \times CB + AD \times DB}{BC \times DB + AD \times AC} : \frac{AC}{DB} :: \frac{CD}{AB} : \frac{CO}{BO}.$$

Or, à cause des triangles équiangles ACO, OBD, l'on a $$\frac{AC}{BD} = \frac{CO}{BO};$$

donc $$\frac{AC \times CB + AD \times DB}{CB \times DB + AD \times AC} = \frac{CD}{AB},$$

Les deux diagonales d'un quadrilatère inscrit sont entre elles comme les sommes des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de ces diagonales.

La réciproque peut se démontrer ainsi : avec les quatre côtés AC, CB, BD, DA, du quadrilatère inscrit, construisons un autre quadrilatère A′ B′ C′ D′, différent du premier ; A′ est l'angle correspondant à A ; B′ à B, etc., soit A′B′ > AB ; donc l'angle D′ est plus grand que l'angle D et C′ plus grand que l'angle C (70) ; il faut donc que C′D′ soit plus petit que CD, sinon les angles B′ et A′ seraient aussi plus grands respectivement que B et A, ce qui est impossible (86) ;

donc $$\frac{A'B'}{C'D'} > \frac{AB}{CD}, \text{ etc.}$$

Cette démonstration suppose qu'avec quatre côtés donnés, on peut toujours construire un quadrilatère inscriptible. *Je dois la démonstration et la construction à un ami, à M. Leger, chef d'institution à Montmorency.* (Voir note 7.)

241. (*Fig.* 53 *bis.*) Si les angles MBD, MBC, sont égaux, les deux triangles CBM, BRD, deviennent équiangles, et donnent la proportion CB : BR :: BM : BD ;

d'où $CB \times BD = BM \times BR = BM\,(BM + MR)$
$= BM^2 + BM \times MR = BM^2 + CM \times MD.$

Dans tout triangle, si on divise un angle en deux parties égales, le produit des côtés de l'angle est égal au produit des segmens formés sur le côté opposé, plus le carré de la droite de division.

Une propriété analogue a lieu lorsqu'on divise l'angle adjacent en deux parties égales.

242. (*Fig.* 53 *ter.*) Si BMR est un diamètre, BDR est un angle droit ; et si BO est

perpendiculaire sur CD, les deux triangles CBO, BDR, seront équiangles, et donnent

$$CB : BR :: BO : BD;$$

d'où $$CB \times BD = BR \times BO.$$

Ainsi, dans tout triangle, le produit des deux côtés est égal au produit de la hauteur abaissée sur le troisième côté, multipliée par le diamètre du cercle circonscrit.

Soit A l'aire du triangle CBD, on a donc

$$A = \tfrac{1}{2} BO \times CD,$$

d'où $$BO = \frac{2A}{CD},$$

et par conséquent

$$CB \times BD = BR \times \frac{2A}{CD},$$

$$CB \times BD \times CD = 2A . BR,$$

$$A = \frac{CB \times BD \times CD}{2 BR}.$$

Ainsi, l'aire d'un triangle est égale au produit des trois côtés, divisé par le double du diamètre du cercle circonscrit.

Cette même aire est évidemment égale à la somme des trois côtés multipliée par la moitié du rayon du cercle inscrit (186).

Lorsque deux triangles ont un angle égal ou supplément l'un de l'autre, les côtés opposés à ces angles, sont entre eux comme les rayons des cercles circonscrits (202).

Théorie des pôles et des polaires.

243. Par le point B (*Fig.* 53) soit menée la tangente BK coupant en K la droite de

contact. DCK', on démontre comme au paragraphe 238, que l'on a

$$BCK.BDO = BCO.DBK$$

donc la droite KD est dirigée harmoniquement en C et en O; la même propriété a lieu si on mène la tangente au point A; donc les deux tangentes menées en A et en B se rencontrent en un point K située sur la direction de CD.

Concevons que la sécante IBA tourne autour du point I, les points A et B du quadrilatère varieront, mais les points C, D, restent fixes, ainsi que la droite CD; le point K variera aussi, mais restera toujours sur la droite fixe. Par conséquent, en prenant sur le prolongement d'une corde CD un point quelconque K, et menant deux tangentes, les cordes qui réunissent deux points de contact simultanés passent par le même point I, situé hors du cercle.

Les sécantes IA, IS, étant divisées harmoniquement en B, O, Q, P (238), il s'ensuit que si l'on mène les diagonales BS, AQ, leur point d'intersection N est situé sur la droite CD, qui joint les points de contact des tangentes qui partent du même point I (225).

Les trois droites SA, QB, DC, se rencontrent en un même point.

Si l'on prolonge AC, BD, jusqu'à ce qu'elles se coupent en un point L, et soit L' le point de rencontre de AD et de BC, la droite LL' passera par le point I; car AOBI est divisé harmoniquement.

Si par le point L ou L' on mène deux tan-

gentes, la droite qui joint les points de contact passe par le point O.

244. (*Fig.* 54.) Lorsque les sécantes IA, IS, retranchent de la circonférence des arcs égaux AB, QS, l'intersection M des cordes transverses BS, AQ, est alors au milieu de la corde CD, et la droite IMT est un diamètre et divise l'angle AIS en deux parties égales. Si donc on mène la droite IK perpendiculairement à ce diamètre, elle formera, avec les deux sécantes et le diamètre, un faisceau harmonique (233). Prolongeant BS jusqu'en K, la droite KS sera divisée harmoniquement en B et en M; et si du point K on mène deux tangentes à la circonférence, la droite qui joint les points de contact passe par le point M (240). Le point K est pris arbitrairement sur la droite KI; le point M et la perpendiculaire KI sont donc liés par une relation analogue à celle qui existe entre le point I et la droite CD, *Fig.* 53. Cette relation peut s'énoncer ainsi : Menant de tous les points d'une droite des couples de tangentes, les cordes qui joignent les points de contact de chaque couple passent toujours par le même point, auquel on a donné le nom de *pôle* (πολέω, je tourne), parce que les cordes semblent tourner autour, et la droite a reçu le nom de *polaire*. KI étant la polaire, M est son pôle situé dans le cercle, *Fig.* 54, et CD étant la polaire, I est son pôle, *Fig.* 53; les deux polaires KI, CD, et les deux pôles M, I, se correspondent; la position d'une des quatre étant connue, celle des trois autres est determinée.

Soit E le centre du cercle et par conséquent le milieu du diamètre TO; de la proportion harmonique

$$TM : TI :: MO : OI,$$

on déduit celle-ci:

$$TM + MO : TM - MO :: TI + OI : TI - OI,$$

ou $$OT : 2ME :: OT + 2OI : OT.$$

Divisant les quatre termes par deux, il vient

$$EO : ME :: EO + OI : EO;$$

or, $$EO + OI = EI.$$

Ainsi, le rayon est une moyenne proportionnelle entre EM et EI.

245. Il est aisé de prouver qu'étant donnés deux polaires quelconques avec leurs pôles, l'intersection des deux polaires est le pôle de la droite qui réunit les deux pôles. Cette propriété des polaires facilite la solution de beaucoup de problèmes; nous en donnerons des exemples.

246. (*Fig.* 55 *bis.*) Soit ABC un triangle rectangle.

Faisant passer une circonférence par les trois sommets du triangle, AC sera un diamètre et les deux autres côtés des cordes : considérés ainsi, les énoncés du paragraphe (214) se changent en ceux-ci:

La perpendiculaire BP, abaissée d'un point de la circonférence sur un diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens du diamètre: la corde BP, qui aboutit à un diamètre, est une moyenne proportionnelle entre le diamètre et le segment adjacent, formé par la perpendiculaire sur le diamètre, abaissée de l'autre extrémité de la corde.

Suite des problèmes. (Voir page 81.)

247. PROBLÈME XXVIII. (*Fig.* 49 *ter.*) Trouver une quatrième proportionnelle aux trois droites AE, BE, AF?

Solution. Menez deux droites sous un angle quelconque; à partir du sommet, portez sur un des côtés de l'angle, et à la suite, les longueurs AE, BE, et sur l'autre côté la longueur AF; joignez E et F; menez BC parallèle à EF, et FC sera la quatrième proportionnelle cherchée; car l'on a AE : BE :: AF : FC (218).

Si AE est égal à BE, la ligne trouvée FC est une *troisième* proportionnelle.

248. PROBLÈME XXIX. (*Fig.* 50 *bis.*) Etant donnée la longueur AL, trouver une droite qui soit à celle-ci, comme deux nombres donnés, par exemple, comme 2 : 3?

Solution. Menez deux droites sous un angle quelconque BAC; à partir du sommet, portez sur un des côtés trois parties égales AM, MK, KE, de longueur arbitraire; portez AL sur le second côté; joignez KL, et menez EF parallèle à KL, AF sera la longueur cherchée; car AL : AF :: AK : AE :: 2 : 3.

Si les deux nombres donnés sont fractionnaires, on les réduit au même dénominateur, et ils seront entre eux comme les numérateurs.

249. PROBLÈME XXX. (*Fig.* 49 *ter.*) Diviser la droite AC en deux segmens additionnels, qui soient entre eux comme deux longueurs donnés AE, EB?

Solution. Commencez comme pour le problème XXVIII; joignez BC et menez EF parallèle; AF, FC, sont les segmens cherchés.

250. Problème XXXI. Diviser AF en deux segmens soustractifs, proportionnels à deux segmens données BE, AB?

Solution. Portez AB, BE sur un des côtés de l'angle; joignez FE; menez la parallèle BC; AC, CF sont les segmens cherchés; AB : BE :: AC : CF.

251. Problème XXXII. (*Fig* 50 *bis.*) Diviser la droite AC en segmens proportionnels aux lignes données AM, MK, KE, EB?

Solution. Tirez deux droites sous un angle quelconque; portez de suite, et à partir du sommet, les parties AM, MK, KE, EB, etc., sur un côté, et sur l'autre la longueur AC; joignez C et le dernier point de division B; menez, par les autres points de division, les parallèles MN, KL, EF, et la droite AC sera partagée, comme il a été demandé dans la figure, et divisée en quatre segmens.

252. Problème XXXIII. Diviser une droite en un nombre donné de parties égales?

Solution. Comme pour le précédent, on prend les parties AM, MK, égales entre elles et de longueur arbitraire, et autant qu'il y a d'unités dans le nombre donné.

253. Problème XXXIV. (*Fig.* 50 *ter.*) Etant donnés les deux segmens consécutifs BO, OC, trouver un troisième segment GC, qui forme, avec les deux, une proportion harmonique?

Solution. D'un point quelconque A, menez les trois droites AB, AO, AC; d'un point quelconque I, pris sur AO, menez les droites transversales CIM, BIN, rencontrant AB en M et AC en N; menez MN, que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle coupe BC en G, qui sera le point demandé. On voit ce qu'il faudrait faire, si les points B, C, G, étant donnés, il fallait trouver le point intermédiaire O.

254. Problème XXXV. (*Fig.* 49 *ter.*) Etant données la base BE, la hauteur AF, d'un rectangle, construire sur AE, comme base, un rectangle équivalent?

Solution. La même que pour le problème XXVIII; CF est la hauteur cherchée.

255. Problème XXXVI. (*Fig.* 55.) Etant données la base AP, la hauteur PC d'un rectangle, trouver le côté du carré équivalent?

Solution. Portez AP, PC, à la suite l'un de l'autre, sur la longueur AC comme diamètre; décrivez une demi-circonférence; élevez en P la perpendiculaire BP; elle est le côté cherché du carré équivalent (240).

256. Problème XXXVII. Trouver une longueur *moyenne proportionnelle* entre deux longueurs données AP, PC?

Solution. La même que pour le problème XXXVI.

257. Problème XXXVIII. (*Fig.* 55.) Partager une droite AC en deux segmens additifs, dont le rectangle soit équivalent à un carré donné?

Solution. Sur AC, comme diamètre, décrivez

une circonférence; élevez en A une perpendiculaire au diamètre, sur laquelle vous prenez AQ égal au côté du carré donné; par Q vous menez une parallèle au diamètre AC; elle coupera la circonférence en deux points M et N, desquels vous abaissez les perpendiculaires MP′, NR; les segmens cherchés sont AP′, P′C, ou bien AR, RC; il est évident qu'on a AP′ = RC et P′C = AR; il y a donc deux solutions qui donnent les mêmes segmens.

Lorsque AQ est égal à la moitié de AC, la parallèle QMN devient tangente à la demi-circonférence, et il n'y a qu'une solution.

Lorsque AQ est plus grand que la moitié de AC, le problème est impossible.

258. Problème XXXIX. Connaissant le produit et la somme des deux côtés adjacens d'un rectangle, construire le rectangle?

Solution. Soit AC la somme et AQ le côté du carré équivalent; le reste comme au problème précédent; les côtés cherchés sont AP′, P′C.

On peut décomposer AC d'une infinité de manières, en deux segmens additifs : le plus grand de tous les rectangles qu'on peut former avec ces segmens est celui qui correspond à AQ = $\frac{1}{2}$ AC; alors ce rectangle devient un carré; de là on conclut que de tous les rectangles qui ont le même contour, le carré est celui dont l'aire est la plus grande.

259. (*Fig.* 55.) Problème XL. Partager la droite AC en deux segmens soustractifs, dont le rectangle soit équivalent à un carré donné?

Solution. Sur AC, comme diamètre, décrivez une circonférence; en A, élevez une perpendiculaire égale au côté AQ du carré donné; menez le diamètre QLOS; QL et QS, sont les deux segmens demandés; car $QS - QL = LS = AC$ et $QL \times QS = AQ^2$ (230).

Le problème est toujours possible.

260. PROBLÈME XLI. Connaissant la différence des deux côtés d'un rectangle, et le carré équivalent, construire le rectangle?

Solution. La même que pour le problème précédent.

261. (*Fig.* 50.) PROBLÈME XLI *bis.* Construire un carré équivalent à la somme des deux carrés donnés?

Solution. Soient AG et AB les deux côtés des carrés donnés; élevez en A une perpendiculaire égale à AB; menez l'hypothénuse BG, elle sera le côté du carré cherché (215).

S'il s'agissait de trouver un carré équivalent à la somme de trois carrés donnés, on cherchera d'abord un carré équivalent à la somme de deux de ces carrés, ensuite on ajoute ce carré équivalent au troisième carré.

On voit donc qu'on peut toujours trouver un carré équivalent à la somme de tant de carrés qu'on voudra.

262. (*Fig.* 50.) PROBLÈME XLII. Construire un carré équivalent à la différence de deux carrés donnés AG^2 et BG^2?

Solution. Prenez une longueur AG; élevez en A une perpendiculaire que vous prolongez indéfiniment. Du point G, comme centre, et

d'un rayon GB, décrivez un arc de cercle qui coupera la perpendiculaire indéfinie en B, et AB sera le côté du carré demandé.

Si BG est égal à AG, alors AB est nul; et si BG est plus petit que AG, le problème est impossible.

On peut donc toujours construire un carré équivalent à des carrés donnés, combinés entre eux par addition et soustraction; on cherche le carré équivalent à la somme des carrés soustractifs, et ensuite un carré équivalent à la différence des deux.

263. (*Fig.* 55 *bis.*) PROBLÈME XLIII. Étant donné le côté BM d'un carré, trouver le côté BN d'un carré, tel que BM^2 soit à BN^2, comme la droite AP est à la droite PC?

Solution. Portez AP et PC de suite sur la même droite; sur AC, comme diamètre, décrivez une demi-circonférence; élevez en P une perpendiculaire qui coupera la circonférence à un point B; menez BA, BC que vous prolongerez indéfiniment; portez le côté BM sur BA, ou sur son prolongement; menez MN parallèle à AC; BN sera le côté du carré cherché.

En effet, l'on a BM : BN :: BA : BC;

donc $BM^2 : BN^2 :: BA^2 : BC^2$;

mais $BA^2 : BC^2 :: AP : PC$ (244);

donc $BM^2 : BN^2 :: AP : PC$.

Si le rapport entre les deux carrés, au lieu d'être donné en lignes, était exprimé par des nombres, la construction serait la même. Exemple : trouver un carré qui soit à un carré donné, comme 4 est à 9; prenez 9 parties

égales de longueur arbitraire, que vous portez de A en P, et ensuite 4 de ces parties de P en C; le reste s'achève comme dessus. Il y a deux cas où la construction se simplifie : le premier est celui où il s'agit de construire un carré double d'un autre; la diagonale du carré donné est évidemment le côté du carré cherché; le second cas est celui où le carré cherché doit être la moitié du carré donné; sur le côté du carré donné, on décrit une demi-circonférence, et la corde du cadran est le côté du carré cherché.

264. **Problème XLIV.** Construire un carré équivalent à un triangle donné?

Solution. Cherchez une moyenne proportionnelle entre la moitié de la hauteur et la base, ou entre la moitié de la base et la hauteur (200).

265. **Problème XLV.** Trouver l'aire d'un trapèse?

Dans le trapèze ABCD (*fig.* 49 *a.*), les deux triangles ABC, CBD, ont des hauteurs égales BK, CL; et l'on aura

$$ABC + CBD = BK \times \tfrac{1}{2} CD + BK \times \tfrac{1}{2} AB$$
$$= BK \frac{(AB + CD)}{2}.$$

L'aire du trapèze est donc égale à la hauteur multipliée par la demi-somme de ses deux bases; la droite EF, qui réunit les milieux E, F, des côtés non parallèles, est parallèle aux bases, et l'on a

$$EI = \frac{1}{2} AB, IF = \frac{1}{2} CD;$$

d'où $$EI + IF = EF = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD.$$

L'aire du trapèze est donc encore égale à sa hauteur, multipliée par la droite qui réunit les milieux des côtés non parallèles.

Observation relative à l'aire des polygones (216); lorsque tous les côtés d'un polygone sont des tangentes à la même circonférence, il est avantageux de faire partir les lignes de division du centre de la circonférence, parce que les triangles auront tous pour hauteur le rayon de la circonférence; lorsque ce centre est hors du polygone, il y aura des triangles additifs et d'autres soustractifs; mais lorsque le centre est dans l'intérieur du polygone, tous les triangles doivent être ajoutés; il suffit d'ajouter ensemble les côtés du polygone, et de multiplier la somme par la hauteur commune, ou par la moitié du rayon du cercle inscrit.

On nomme *polygone circonscrit* à une circonférence, un polygone dont tous les côtés touchent la même circonférence, et celle-ci est *inscrite* à la circonférence.

Le résultat précédent peut donc s'énoncer ainsi:

L'aire d'un polygone circonscrit à une circonférence, est égale au périmètre du polygone multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit, le centre étant dans l'intérieur du polygone.

On peut donc trouver un carré équivalent à un polygone donné; il suffit de faire la

somme des carrés respectivement équivalens aux triangles composans; mais nous allons donner un moyen plus simple de résoudre ce problème.

266. (*Fig.* 56.) Problème XLVI. *Transformer le quadrilatère ABCD en un triangle équivalent?*

Solution. Menez la diagonale BD, et par A, une parallèle à BD; prolongez CD, jusqu'à ce qu'elle coupe cette parallèle en E; menez BE; le triangle EBC est équivalent au quadrilatère ABCD. En effet, les deux triangles ABD, EBD, sont équivalens; ils ont même base BD, et des hauteurs égales, puisque leurs sommets A, E, sont une parallèle à la base. Ajoutant à chacun de ces triangles, le triangle BCD, on aura d'un côté le quadrilatère ABCD, et de l'autre le triangle BCE; et le triangle équivalent a un côté commun avec le quadrilatère.

Problème XLVII. *Transformer un polygone quelconque en un triangle équivalent?*

Solution. Soit, par exemple, un polygone de 10 côtés; menez une diagonale formant un quadrilatère avec 3 côtés consécutifs. Par le problème XLVI, transformez ce quadrilatère en un triangle équivalent, la diagonale sera le côté commun; le polygone de 10 côtés sera donc transformé en un polygone équivalent de 9 côtés; on transformera celui-ci en un polygone équivalent de 8 côtés, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive au triangle équivalent.

Problème XLVIII. *Construire un carré équivalent à un polygone donné?*

Solution. Par le problème précédent, transformez le polygone en triangle, et construisez un carré équivalent à ce triangle (261).

267. (*Fig*. 57.) PROBLÈME XLIX. Partager la droite AB en deux segmens additifs, tels que le carré d'un segment soit équivalent au rectangle construit sur l'autre segment et la ligne entière?

Solution. Élevez à l'extrémité A de AB, une perpendiculaire égale à la moitié de AB. Du point O, comme centre, avec le rayon OA, décrivez une circonférence; menez par l'extrémité B et le centre O la sécante BMON ; portez BM de B en C; BC et AC seront les segmens demandés; en effet, BA étant une tangente à la circonférence, l'on a

$$BN : BA :: BA : BM;$$

d'où $BN - BA : BA :: BA - BM : BM$;

or $BA = 2AO = MN$;

donc $BN - BA = BN - MN = BM = BC$,

et $BA - BM = BA - BC = AC$;

donc $BC : BA :: AC : BC$,

et $BC^2 = BA \times AC$. c. q. f. d.

Il est évident qu'on a toujours $BC > AC$.

Ce problème s'énonce ordinairement ainsi : Partager une droite *en moyenne* et *extrême raison*.

C'est la prop. XI du 2e. livre d'Euclide.

PROBLÈME L. (*Figure* 57.) Partager la droite AB en deux segmens *soustractifs*, tels que le carré d'un des segmens soit équivalent au rectangle construit sur l'autre segment, et sur la ligne donnée?

Solution. Même construction que pour le

problème précédent; portez BN de B en C′, et AC′, BC′ sont les segmens cherchés; en effet, on a la proportion

$$BN+BA : BN :: BA+BM : BA,$$

ou

$$C'A : BC' :: BC' : BA;$$

donc

$$BC'^2 = BA.\ C'A.$$

268. (*Figure* 58.) PROBLÈME LI. Etant données les deux droites B′AB, C′AC, trouver un point tel que ses distances à ces deux droites soient dans le rapport donné de la longueur MP à la longueur QN?

Solution. Par un point quelconque M, pris sur B′AB, élevez une perpendiculaire égale à MP, et menez par P une parallèle à B′AB; au point quelconque N, pris sur CAC′, élevez une perpendiculaire égale à NQ, et menez par Q une parallèle à CAC′; les deux parallèles aux côtés de l'angle se rencontreront en un point I; tous les points de la droite IAS satisfont à la question.

En prolongeant QN dans le sens opposé, et prenant NQ = NQ′, la parallèle menée par Q′ coupera la parallèle en un point I′ situé dans l'angle CAB′, et tous les points de la droite I′AS′ satisfont aussi à la question; ainsi, les deux droites sont le lieu géométrique du point cherché; le problème est toujours possible. Lorsque les deux distances sont égales, ce problème est le même que celui qu'on a déjà résolu (185).

Si les distances sont mesurées sur des lignes obliques faisant des angles connus avec les côtés de l'angle, les opérations qui composent la solution restent les mêmes; au lieu d'élever

des perpendiculaires, on mènera des obliques faisant les angles donnés avec les côtés de l'angle.

PROBLÈME LI *bis*. Etant données trois droites, trouver un point tel que ses distances à ces droites soient dans des rapports donnés?

Solution. Soient A, B, C, les trois points d'intersection des trois droites données, le point cherché devra se trouver sur deux droites A′, A″, passant par le point A, et déterminées d'après le problème précédent; A′ désigne la droite passant dans l'intérieur du triangle ABC. Il se trouvera encore sur quatre droites B′, B″ passant par B, et C′, C″ passant par C; il se trouvera à l'intersection des trois droites A′, B′, C′; A″, B″, C′; A″, C″, B′; B″, C″, A′; ainsi quatre points satisfont à la question, dont le premier est situé dans l'intérieur du triangle ABC.

Lorsque les trois distances sont égales, on retombe dans le problème (186); et les quatre droites passant par le point A forment un faisceau harmonique; il en est de même des quatre passant par B et par C (232).

269. PROBLÈME LII. (*Figure* 59.) Étant donnés deux points A, C, trouver un troisième point M tel que ses distances à ces deux points soient dans un rapport donné?

Solution. Divisez AC en deux segmens *additifs* BC, BA, et en deux segmens *soustractifs* DA, DC, qui soient respectivement dans le rapport donné; il est évident que déjà les deux points B et D satisfont à la question; mais tous les points de la circonférence BMD, décrite sur BD comme diamètre, y

satisfont également. En effet, d'un point quelconque M de la circonférence, soient menées les quatre droites MA, MB, MC, MD; puisqu'on a la proportion BC : BA :: DC : DA, la droite AD est divisée harmoniquement en B et C, et les quatre droites forment donc un faisceau harmonique (232); or l'angle BMD, inscrit dans la demi-circonférence, est droit, donc la droite BM divise l'angle AMC en deux parties égales (233); et l'on a

$$MC : MA :: BC : BA, \text{c. q. f. d.}$$

Si du point A on mène deux tangentes à la circonférence, la corde qui réunit les points de contact passera par le point C, par conséquent la polaire de A passe par C.

Le point O étant le milieu de BD, l'on a (125)

$$OC : OB :: OB : OA;$$

d'où $OB - OC : OB :: OA - OB : OA;$

$$BC : OB :: AB : OA,$$

d'où $AB - BC : BC :: OA - OB : OB,$

$$AB - BC : BC :: AB : OB.$$

BC étant plus petit que AB, moins BC diffère de AB, plus OB est considérable.

Lorsque BC est égal à AB, le rayon OB devient infiniment grand, et le cercle se change en une droite perpendiculaire sur le milieu de AC; en effet, lorsque BC = AB, le rapport donné est égal à l'unité; et tous les points de la perpendiculaire élevée en B sont également éloignés des points A et C. Lorsque BC est plus grand que AB, le centre passe de l'autre côté du point A.

Il est facile de vérifier et de trouver les expressions suivantes:

$$BO = \frac{AB \cdot BC}{AB - BC},$$

$$AO = \frac{AB^2}{AB - BC},$$

$$CO = \frac{BC^2}{AB - BC},$$

$$AD = \frac{AB \cdot AC}{AB - BC},$$

$$AB \cdot AD = \frac{AB^2 \cdot AC}{AB - BC};$$

prolongeant AM jusqu'à ce qu'elle coupe de nouveau la circonférence en M', l'on aura

$$CM : AM :: BC : AB,$$

$$CM' : AM' :: BC : AB;$$

d'où $CM \times CM' : AM \times AM' :: BC^2 : AB^2$;

or $AM \times AM' = AB \cdot AD = \frac{AB^2 \cdot AC}{AB - BC}$;

donc $CM \times CM' = \frac{BC^2 \cdot AC}{AB - BC}$;

ainsi le rectangle $CM \times CM'$ est constant pour toutes les droites qui passent par A.

270. Problème LIII. Etant donnés trois points, et les rapports de leurs distances à un quatrième point, déterminer ce quatrième point?

Solution. Soient A, B, C, les points donnés, et M le point demandé; $\frac{MA}{MB}$, $\frac{MA}{MC}$ sont des rapports connus; et par conséquent aussi $\frac{MB}{MC}$; je divise AB en deux segmens additifs AD, DB;

et ensuite en deux segmens soustractifs AE, EB, qui soient dans le rapport donné de $\frac{MA}{MB}$; décrivant sur DE une circonférence, le point cherché sera sur cette ligne; opérant de même sur AC, en faisant usage du rapport donné $\frac{MA}{MC}$, on aura une seconde circonférence sur laquelle devra également se trouver le point; il sera à l'intersection des deux cercles; il y a donc deux points qui satisfont à la question; et si l'on fait encore usage du rapport $\frac{MB}{MC}$, et de la droite BC, on aura une troisième circonférence qui passera par les deux mêmes points que les deux premières, et par conséquent les trois circonférences ont leurs centres situés sur une même droite.

Lorsque les deux circonférences se touchent, il n'y a qu'un point, et lorsqu'elles ne se rencontrent pas, le problème est impossible.

Lorsque le rapport $\frac{MA}{MB}$ est égal à l'unité, la première circonférence se change en une droite perpendiculaire sur le milieu de AB (266); et si le rapport $\frac{MA}{MC}$ est aussi égal à l'unité, les trois circonférences deviennent des droites perpendiculaires sur les milieux des côtés respectifs, et passent par un même point, qui est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (174.)

271. Problème LIV. (*Fig.* 60.) Étant donnés

un point F, désigné sous le nom de *foyer*, et une droite LN, désignée sous le nom de *directrice*; trouver un point M tel que le rapport de ces distances MF, MG, au foyer et à la directrice soit égal à un rapport donné?

Solution. Il faut distinguer trois cas;

1° $MF < MG$, ou bien $\frac{MF}{MG} < 1$;

2° $MF = MG$, ou bien $\frac{MF}{MG} = 1$;

3° $MF > MG$, ou bien $\frac{MF}{MG} > 1$.

Premier cas; $\frac{MF}{MG} < 1$:

Ellipse.

Abaissez de F une perpendiculaire CF sur la directrice; partagez CF en deux segmens *additifs* AC, AF, et en deux segmens *soustractifs* CA′, A′F qui aient entre eux le rapport donné; il est évident que les deux points A et A′ satisfont à la question, et que la droite CA′ est divisée harmoniquement; mais il existe encore une infinité d'autres points qui remplissent la condition exigée. En effet, par un point quelconque G pris sur la directrice, élevez une perpendiculaire, menez GF, et opérez sur cette ligne comme vous avez fait sur CF, ce qui donne les deux points K et K′; sur KK′ comme diamètre, décrivez une circonférence qui coupera la perpendicu-

laire à la directrice en deux points M et M′, qui satisfont à la question. En effet, d'après le problème LII, on aura

$$MG : MF :: GK : KF,$$

or $$GK : KF :: CA : AF;$$

donc $$MG : MF :: CA : AF,$$

et de même $$M'G : M'F :: CA : AF.$$

Ainsi, M′ et M′ sont deux points cherchés; si on porte CG de l'autre côté de CA, et qu'on mène la perpendiculaire GRR′, elle sera coupée par la même circonférence en deux points R, R′, symétriques à M et M′ par rapport à l'axe CA′; et ces points résolvent aussi la question; on trouvera de la même manière les points situés sur les perpendiculaires passant par G′, G″, etc.; tous ces points, qu'on peut rapprocher et multiplier autant qu'on veut, forment une ligne continue à laquelle on a donné le nom d'*ellipse*, et qu'on peut décrire à l'aide d'une circonférence de diamètre variable; il est aisé de démontrer que cette ligne ne saurait avoir trois points en ligne droite, donc elle est courbe.

Le centre de la terre décrit autour du soleil une courbe qui diffère infiniment peu d'une ellipse; il en est de même des autres planètes.

272. Les droites FC, FG, FG′, FG″, etc., étant coupées proportionnellement en A, K... il s'ensuit que tous les points A, K... extrémités du diamètre variable, sont sur une même droite AK perpendiculaire à CA′; il en est de même des extrémités A′, K′....; les centres O, O′ des circonférences, milieux des droites AA′, KK′, etc.,

renfermées entre les mêmes parallèles, sont aussi sur une même droite, qui divise en parties égales les lignes II′, SS′, comprises entre ces parallèles; donc VI = VI′; mais MM′ corde dans la circonférence KMM′K′, est aussi divisée en deux parties égales par OV, perpendiculaire abaissée du centre O′; donc VM = VM′, et par conséquent IM = I′M′; portant AC de A′ en C′ et menant la perpendiculaire XC′Y les points O, V, V′ sont encore les milieux des droites égales CC′, GX, GV′, etc., et l'on aura

$$GM = M'X;\ GI = I'X;\ M'G = MX.$$

273. L'on a

$$MF = MG.\frac{AF}{CA};\ M'F = M'G.\frac{AF}{CA};$$

donc $$MF + M'F = \frac{AF}{CA}(MG + M'G)$$

$$= \frac{AF}{CA}(MG + MX) = \frac{AF}{CA}.GX = \frac{AF}{CA}.CC';$$

or de la proportion CA : AF :: CA′ : A′F, l'on déduit CA + CA′ : A′F + AF :: CA : AF,

ou $$CC' : AA' :: CA : AF;$$

ainsi $$AA' = \frac{AF}{CA}.CC';$$

donc $$MF + M'F = AA' \quad (1).$$

AA′ se nomme le *grand axe* de l'ellipse, et les droites FM, FM′, qui vont du foyer aux points de l'ellipse, se nomment des *rayons vecteurs;* ainsi le résultat (1) peut s'énoncer ainsi :

La somme des rayons vecteurs qui, partis

du même foyer, aboutissent aux extrémités d'une corde parallèle au grand axe est constamment égale au grand axe.

Faisons $A'F' = AF$, on aura $MF' = M'F$; donc $MF + MF' = AA'$ (2).

Le point F' est donc un second foyer de l'ellipse, et la droite $C'XY$ est une seconde directrice relativement à ce foyer; car on a évidemment la proportion $F'M' : M'X :: F'A' : A'C'$.

Cette propriété s'énonce ainsi: la somme des deux *rayons vecteurs*, qui vont d'un point de l'ellipse aux *deux foyers*, est égale au grand axe; et il est facile de voir que pour un point situé hors de l'ellipse, cette somme est plus grande; et pour un point situé dans l'intérieur de l'ellipse, elle est plus petite que le grand axe.

274. De là on conclut que, 1° la droite menée par un point de l'ellipse, qui divise en deux parties égales l'angle formé par un rayon vecteur et son prolongement, est une tangente à l'ellipse; 2° la droite qui divise en deux parties égales l'angle formé par les rayons vecteurs, est perpendiculaire à la tangente ou une *normale*; 3° les deux rayons vecteurs, la tangente et la normale, forment un faisceau harmonique.

275. La propriété exprimée par l'équation (1) (p. 144) donne un moyen facile de décrire l'ellipse d'un mouvement continu; après avoir désigné à volonté une ligne AA' pour grand axe, et les points F, F' également éloignés de A et de A' pour foyers, on prend un fil d'une longuer égale au grand axe, et on en fixe une extrémité au foyer F, et l'autre au foyer F';

on tend le fil avec un style de manière à lui faire faire un angle FMF', et faisant tourner le style en maintenant toujours la tension du fil, la pointe décrira l'ellipse, car on aura partout $MF + MF' = AA'$; l'on obtient ainsi la même courbe que si on l'avait décrite au moyen de sa directrice. On voit donc que l'ellipse est une courbe fermée; aux deux points symétriques B et B', où les rayons vecteurs BF, BF' sont égaux, on a $BF = \frac{1}{2}AA' = AO$; la ligne BB' est le *petit axe* de l'ellipse. Ainsi, lorsqu'on connaît le grand axe et le petit axe, en grandeur et en position, on peut décrire l'ellipse; le point O, milieu du grand axe, est le *centre* de l'ellipse; car toute corde passant par ce point Y est divisée en deux parties égales; et ces cordes sont appelées *diamètres;* il est facile de prouver, 1° que le grand axe est le plus grand, et le petit axe le plus petit de tous les diamètres; 2° que les perpendiculaires aux extrémités du grand axe, et les perpendiculaires aux extrémités du petit axe, ne rencontrant la courbe qu'en un seul point, sont des tangentes et forment un rectangle circonscrit à l'ellipse.

Les quatre points A, B, A', B', extrémités des deux axes, sont les *sommets* de l'ellipse.

276. Le triangle rectancle BFO donne $BO^2 = BF^2 - FO^2 = AO^2 - FO^2 = (AO + FO)(AO - FO) = A'F \,.\, AF$: ainsi le $\frac{1}{2}$ petit axe est une moyenne proportionnelle entre les distances d'un foyer aux deux extrémités du grand axe, ou bien entre les distances *focales*.

277. Dans le trapèze MFF'M', les angles

opposés sont supplémens l'un de l'autre : donc ses quatre sommets sont situés sur une même circonférence (159), et l'on a

$$MF \times M'F' + MM' \times FF' = MF' \times M'F,$$

ou bien $MF^2 + MM' \times FF' = M'F^2$ (233)

$$M'F^2 - MF^2 = MM' \times FF';$$

$$(MF' - MF)(MF' + MF) = (MF' - MF)AA'$$
$$= MM'.\ FF',$$

et par conséquent $\dfrac{MF' - MF}{MM'} = \dfrac{FF'}{AA'}$.

Ainsi, la différence des deux rayons vecteurs qui partis du même foyer, aboutissent à la même corde parallèle au grand axe, divisée par cette corde, est constamment égale à la distance des deux foyers divisée par le grand axe. Cette différence diminue donc avec cette distance ; et lorsque les deux foyers se réunissent au centre, leur distance est nulle ; tous les rayons vecteurs sont égaux, et l'ellipse devient un cercle, décrit sur le grand axe comme diamètre; plus les foyers se rapprochent du centre, et plus l'ellipse se rapproche de ce cercle, et plus les directrices s'éloignent de A et de A'. On donne le nom d'*excentricité* au rapport $\dfrac{FF'}{AA'} = \dfrac{OF}{OA}$. Ainsi le cercle est une ellipse dont l'excentricité est nulle, et dont les directrices sont situées à l'infini. Plus OA diminue et plus le cercle devient petit ; et lorsque OA devient nul, le cercle se réduit en un point.

Le foyer F restant fixe, plus le point A s'approche de C et plus les points O et A' s'en éloignent ; et lorsque A est au milieu de FC ; O et A' sont à des distances infinies, alors

aussi on a $\frac{AF}{AC} = \frac{MF}{MG} = 1$; ce qui est le deuxième cas.

Problème LIV. *Deuxième cas.* $\frac{MF}{MG} = 1$:

Parabole.

278. Ce cas est l'objet du problème XXVI (p. 79) : nous avons vu que le lieu géométrique du point est une parabole.

279. **Problème LIV.** *Troisième cas.* $\frac{MF}{MG} > 1$:

Hyperbole.

(*Fig.* 61.) Abaissez de F une perpendiculaire FC sur la directrice LN ; partagez CF en deux segmens *additifs* AC, AF, et en deux segmens *soustractifs* A'F, A'C, qui aient entre eux le rapport donné : les points A et A' satisfont à la question : en raisonnant comme pour l'ellipse, on trouvera les autres points M, M', qui remplissent la condition voulue ; dans la vue d'abréger, on a pris les mêmes lettres dans les *figures* 60 et 61, pour désigner les points analogues ; avec cette différence que CA étant plus petit que AF, il faut nécessairement, pour que la proportion harmonique existe, que C soit entre A et A', que G soit entre K et K' dans la *fig.* 61 ; tandis que ces points sont différemment situés dans la *fig.* 60 : en faisant les constructions et réunissant les points, on trouve qu'ils sont distribués sur

une courbe à deux branches ouvertes, séparées, PAQ, P'A'Q', qui s'étendent à l'infini, et sont symétriquement divisées par les deux axes AA' et BB'; on prouvera comme pour l'ellipse, que le point V est le milieu de MM' et de II'; mais, dans l'ellipse, MM' est égal à GM'—GM, à la différence des deux segmens GM, GM'; au lieu que, dans l'hyperbole, elle est la somme de ces segmens; de là résulte une modification dans la propriété énoncée (275). En effet, l'on a

$$MF = MG \cdot \frac{AF}{CA}$$

$$M'F = M'G \cdot \frac{AF}{CA};$$

d'où $M'F - MF = \frac{AF}{CA}(M'G - MG)$

$$= \frac{AF}{CA}(MG' - MG) = \frac{AF}{CA} \cdot GG' = \frac{AF}{CA} \cdot CC'.$$

Et on démontre, comme ci-dessus (265), que

$$\frac{AF}{CA} \cdot CC' = AA';$$

donc $$M'F - MF = AA'.$$

AA' se nomme le *premier axe;* ainsi dans l'hyperbole, *la différence des rayons vecteurs qui aboutissent à la même corde parallèle au premier axe, est égale à ce premier axe.*

En prenant A'F' = AF, on aura aussi un second foyer, et on démontre, comme ci-dessus (275), *que la différence des rayons vecteurs qui vont d'un point de l'hyperbole*

aux deux foyers, est constamment égale au premier axe.

De là on déduit un moyen de décrire cette courbe d'un mouvement continu.

Ayant pris à volonté les foyers F, F′ et une longueur AA′ pour premier axe, on fixe en F′ une règle, mobile autour de ce point; on attache un bout d'un fil en F et l'autre à un point M de la règle, de manière que la longueur F′M de la règle, moins celle du fil, soit égale à AA′ : il est évident que le point M est à la courbe; ensuite on fera tourner la règle autour de F′, de sorte que l'angle MF′F aille en diminuant, et tenant toujours le fil appliqué contre la règle, à l'aide d'un style, la pointe décrira l'arc d'hyperbole MA; car les différences entre les longueurs de la règle et du fil restent constantes, puisqu'elles diminuent chacune de la même quantité; plus la longueur primitive de la règle sera grande et plus grand sera l'arc décrit; on voit ce qu'il faut faire pour décrire les arcs situés au-dessous du premier axe.

Dans l'hyperbole, l'axe BOB′ ne rencontre pas la courbe; on le nomme *second axe;* le centre O de l'hyperbole divise en deux parties égales les cordes transverses qui y passent, et que, par cette raison, on nomme *diamètres*; mais toutes les lignes qui passent par le centre ne rencontrent pas la courbe. Nous verrons plus loin comment on peut déterminer la dernière de toutes celles qui rencontrent, ou bien celles qui rencontrent à l'infini, et qui ont été nommées *asymptotes.*

Lorsque la directrice passe par le foyer

l'hyperbole se réduit évidemment à deux droites.

280. On démontre, que 1° la droite qui divise en deux parties égales l'angle formé par deux rayons vecteurs allant d'un point de la courbe aux deux foyers, est une tangente; 2° la droite qui divise en deux parties égales l'angle adjacent, est une normale; 3° les deux rayons vecteurs, la tangente et la normale, forment un faisceau harmonique.

Dans l'ellipse, la première droite est une normale et la seconde une tangente. (P. 145.)

Les trois courbes, la *parabole*, l'*ellipse* et l'*hyperbole*, sont connues sous le nom de *sections coniques*. Nous verrons plus loin la raison de cette dénomination, et nous nous en servirons par anticipation pour abréger le discours.

Il est évident que si la distance GM d'un point de la courbe à la directrice était mesurée obliquement, parallèlement à une droite donnée, on aura toujours les mêmes courbes; mais elles ne correspondent plus aux mêmes conditions; ainsi lorsque la distance au foyer est égale à la distance à la directrice, on n'aura pas une parabole, mais une ellipse ou une hyperbole, etc.

281. PROBLÈME LV. (*Fig.* 62.) Étant donné le point F et les deux droites IR, IT; trouver sur la dernière un point M tel, que sa distance au point F soit à sa distance à la droite IR dans un rapport donné, par exemple, comme AF est à AC?

Solution. Du point quelconque D, élevez la perpendiculaire DE, et du point M abais-

sez la perpendiculaire MG, on aura les deux proportions DE : EI : : GM : MI

AF : AC : : MF : GM :

multipliant les proportions terme à terme, il vient AF . DE : EI . AC : : MF : MI.

Le rapport de MF à MI est donc connu ; divisant IF harmoniquement en K et K', de manière que l'on ait $\frac{\text{KF}}{\text{IK}} = \frac{\text{AF . DE}}{\text{EI . AC}}$; et décrivant sur KK', comme diamètre, une circonférence, elle coupera la droite en deux points, M et M' qui satisfont à la question.

La droite FO, qui divise l'angle MFM' en parties égales, coupe harmoniquement la droite IT ; car l'on a

FM : FM' : : IM : IM' : : MO : OM',

et FO est perpendiculaire sur IF.

Supposons que IR et le point F restant fixes, la droite IT tourne autour de I ; les points M, M' appartiendront à une section conique, la droite FO reste fixe, et par conséquent le point O décrit une droite qui passe par le foyer F ; de là on conclut que, 1° si par un point I pris sur la directrice IR, on mène des sécantes IMM', et qu'on les divise harmoniquement, les points de division O sont sur une même droite ; 2° cette droite passe par le foyer ; 3° la directrice est la *polaire* du foyer ; 4° menant par le foyer une corde quelconque, et par les extrémités de cette corde, deux tangentes, leur point d'intersection appartient à la directrice ; 5° ce point et le foyer sont sur une droite perpendiculaire à la corde.

Nous verrons par la suite que la première de ces propriétés a lieu, lors même que le point I n'est pas sur la directrice.

282. PROBLÈME LVI. Connaissant le foyer, le sommet voisin et la directrice d'une des sections coniques, et une droite étant donnée, trouver l'intersection de cette droite, avec chacune de ses courbes, sans avoir besoin de les décrire?

Solution. La même construction que pour le problème précédent.

283. PROBLÈME LVII. Etant donnés le foyer commun à deux sections coniques, les sommets voisins, et la directrice de chacune, trouver, s'il y a lieu, les points d'intersection des deux courbes, sans avoir besoin de les décrire?

Solution. Soit F le foyer commun, D la directrice de la première courbe, et D' la directrice de la seconde; soit M un point d'intersection cherché, et MG, MG' les perpendiculaires abaissées de M sur D et D', les rapports $\frac{MG}{MF}$ et $\frac{MG'}{MF}$ sont donnés: on connaît donc aussi le rapport $\frac{MG}{MG'}$, ou le rapport des distances du point M à deux droites D et D'; alors, d'après le problème LI (269), le point devra se trouver sur deux droites; on déterminera l'intersection de chacune de ces droites avec l'une quelconque des courbes données (prob. LV); on aura en général quatre points, qui sont ceux d'intersection des deux courbes.

284. PROBLÈME LVIII. Soit A, B, C, trois sections coniques quelconques: D, D', D'' leur directrice respective; et soit

F le foyer commun à	A et B
F'	B et C
F''	A, C.

Trouver le point ou les points communs à ces trois courbes, s'il y a lieu, sans décrire les courbes?

Solution. On connaît les rapports des distances du point M aux trois directrices, on peut donc le construire (problème LII); il y en a en général quatre points qui peuvent être communs à trois sections coniques; nous disons en général, car ces points peuvent se réduire à trois, à deux, à un seul, et même le problème peut devenir impossible.

285. PROBLÈME LIX. (*Fig.* 63.) Etant donnés deux cercles, construire un troisième cercle qui touche les deux cercles donnés?

Solution. Soit A, B, les centres des deux cercles donnés, R, R', leurs rayons, et $R > R'$; désignons par C le centre du cercle cherché; joignons les deux centres donnés par une droite; elle coupera les deux cercles en quatre points, que nous désignons par E, F, G, H, dans l'ordre de leur succession; EAF est le diamètre du cercle A, et GBH celui du cercle B; décrivant sur EG, FG, FH, EH comme diamètre, quatre cercles, ils satisferont à la question; mais il y en a encore une infinité d'autres.

1° Pour tous les cercles qui, comme FG, touchent extérieurement les cercles donnés, on a $CA - CB = R - R'$; car $CF = CG$: par conséquent la différence des distances du point C aux deux centres A et B est constante; le point C est donc sur une branche d'hyperbole ayant A et B pour foyers, et $R - R'$ pour grandeur du premier axe; cette hyperbole passe par le milieu de FG.

2° Pour tous les cercles qui, comme FH, sont touchés intérieurement, on a $CE = CH$

et $CA - CB = R - R'$; ainsi les centres de ces cercles sur la même hyperbole, mais sur la seconde branche.

3° Pour les cercles, comme EG, FH, qui touchent un cercle intérieurement et l'autre extérieurement, l'on a $CG = CE$ ou $CF = CH$, et de là $CA - CB = R + R'$; les centres de ces deux systèmes de cercle sont donc sur une seconde hyperbole, ayant mêmes foyers que la précédente ; mais son premier axe est égal à $R + R'$; chaque branche renferme les centres d'un système de cercles qui touchent de la même manière les deux cercles donnés.

286. Problème LX. Construire un cercle qui touche trois cercles donnés?

Solution. Soient A, B, C, les trois cercles donnés, R, R', R'' les rayons respectifs ; le centre du cercle qui les touche tous les trois, sera à l'intersection de deux hyperboles, ayant pour foyers A et B et A et C, ou bien A et B et B et C ; par conséquent, dans les deux cas, ils ont un foyer commun : on pourra donc trouver leur point d'intersection (problème LVII) ; on trouvera de même les autres cercles tangens. Nous reviendrons sur ce problème, pour le résoudre plus simplement.

287. Problème LXI. (*Figure* 64.) Par un point donné M, dans l'angle CAB, mener une droite DME, telle que les deux segmens DM, ME, soient dans un rapport donné ?

Solution. Menez par M la parallèle MF à l'un des côtés de l'angle ; prenez AF à FE dans le rapport donné ; tirez EMD, ce sera la ligne demandée.

Si le rapport donné est l'unité, il suffit de faire $FE = AF$, et le point M sera le milieu de

DME. On voit ce qu'il y aurait à faire si le point M, étant dans l'angle adjacent, les deux segmens deviennent soustractifs.

Polygones semblables; centres de similitude.

288. (*Fig* 65.) Deux polygones ABCDE, *abcde*, sont équiangles *entre eux*, lorsqu'en prenant les angles dans le même ordre, ils sont égaux chacun à chacun : ainsi, $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, etc.

Dans deux polygones équiangles, les sommets des angles égaux sont dits sommets *homologues* ; ainsi, A est homologue à *a*, B à *b*, etc.

On nomme *côtés* et *diagonales homologues*, les côtés et les diagonales qui réunissent deux sommets homologues : ainsi, les côtés AB et *ab* sont homologues ; il en est de même de BC et *bc*, de AD, *ad*.

Deux polygones sont *semblables* lorsqu'ils sont *équiangles entre eux*, et *ont leurs côtés homologues proportionnels;* de manière que l'on ait $AB : ab :: BC : bc : CD : cd$, etc.; ainsi, la similitude des polygones suppose, 1° l'égalité des angles; 2° la proportionnalité des côtés homologues. Lorsque le polygone n'a que trois côtés, dans le triangle, une de ces conditions suffit; car la seconde condition en est une conséquence (204).

Un carré et un rectangle ne sont pas des polygones semblables; la première condition existe, mais pas la seconde ; un carré et un losange ne sont pas des figures semblables; la deuxième condition existe, mais non la première; tous les carrés sont des figures sem-

blables; car les deux conditions subsistent ensemble.

289. De cette suite de proportions AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* :: DE : *de* :: EF : *ef*, l'on conclut AB+BC+CD+DE+EF : *ab*+*bc*+*cd*+*de*+*ef* :: AB : *ab* ; donc,

Le contour ou le périmètre du premier polygone est au périmètre du polygone semblable comme un côté du premier est au côté homologue du second.

290. Menant des diagonales des deux sommets homologues A et *a*, les deux triangles ABC, *abc*, sont semblables, puisqu'ils ont un angle égal (A, *a*), compris entre des côtés proportionnels (208) : donc angle BCA = angle *bca*; mais l'angle BCD = *bcd* : donc ACD = *acd*; or AC : *ac* :: BC : *bc* :: CD : *cd* : donc les deux triangles ACD et *acd* sont semblables, puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels. On démontre de même que le triangle ADE est semblable au triangle ADE; par conséquent, *deux polygones semblables peuvent être partagés en un même nombre de triangles semblables, par des diagonales tirées de deux sommets homologues.*

291. En comparant les aires des triangles semblables (202), on obtient :

Aire ABC : aire *abc* :: AB.BC : *ab*.*bc* :: AB^2 : ab^2;

Aire ADC : aire *adc* :: CD^2 : cd^2 :: AB^2 : ab^2;

Aire ADE : aire *ade* :: DE^2 : de^2 :: AB^2 : ab^2;

D'où aire ABC : aire *abc* :: aire ADC : aire *adc* :: aire ADE : aire *ade* ;

Et ABC+ADC+ADE : *abc*+*adc*+*ade* :: aire ABC : aire *abc* :: AB^2 : *ab*.

Ainsi, *les aires des deux polygones sem-*

blables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.

Soit, par exemple, $AB = 2^m$ et $ab = 1^m$; le contour du petit polygone sera contenu 2 fois dans celui du grand, et l'aire du petit polygone sera contenue 4 fois dans celle du grand; le rapport des aires croît plus rapidement que celui des contours.

292. (*Fig.* 65.) La réciproque de la proposition (289) est celle-ci : *deux polygones sont semblables lorsqu'ils sont formés d'un même nombre de triangles semblables, et semblablement placés*; en effet, de ce que les deux triangles ABC et *abc* sont semblables, (287) on en conclut qu'ils sont équiangles entre eux (204), qu'ils ont les côtés proportionnels, et l'on a BC : *bc* :: CD : *ac*; mais les deux triangles suivans ACD et *acd* étant semblables, fournissent la proportion AC : *ac* :: CD : *cd*; donc BC : *bc* :: AC : *cd*; en continuant de la même manière, on parvient à prouver que les deux polygones ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels. Si l'on retourne le triangle ABC, de manière que C soit en A et A en C, les deux polygones seront encore composés d'un même nombre de triangles semblables, et toutefois les polygones ne seront plus semblables, car les triangles ne sont pas semblablement placés; les côtés sont encore proportionnels, mais les angles ne sont plus égaux.

293. (*Fig.* 66.) Deux polygones équiangles ABCDE, *abcde*, peuvent toujours être placés de manière à avoir tous les côtés homologues parallèles et tournés dans le même

sens ; en effet, AB étant parallèle à *ab*, et l'angle ABC étant égal à l'angle *abc*, et tourné dans le même sens, il faut que *bc* soit parallèle à BC, et par la même raison CD sera parallèle à *cd*, et ainsi de suite.

Lorsque les polygones sont de plus semblables, les droites A*a*, B*b*, C*c*, et qui passent par les sommets homologues, se réunissent en un même point O, appelé *centre de similitude.* En effet, soient menées les deux droites A*a*, B*b*, se rencontrant en O, l'on a la proportion O*b* : OB : : *ab* : AB ; mais *ab* : AB : : BC : *bc;* donc O*b* : OB : : *bc* : BC : il faut donc que les trois points O, *c*, C, soient sur une même droite; on démontrera de même que les trois points O, *d*, D, sont sur une même droite.

294. Et réciproquement, lorsque deux polygones à côtés parallèles, et tournés dans le même sens, ont un *centre de similitude*, ils sont nécessairement semblables : donc, pour construire sur la droite donnée AB homologue à *ab*, un polygone semblable, il faut mener du point O des droites aux sommets, une droite parallèle à *ab* et égale à AB ; par B une parallèle BC à *bc*; par C une parallèle CD à *cd*, et ainsi de suite ; le polygone ABCDE sera semblable au polygone *abcde.*

295. Le parallélisme des côtés entre deux polygones semblables, pouvant s'établir d'une infinité de manières, il s'ensuit qu'il existe une infinité de centres de similitude, soit dans l'intérieur, soit à l'extérieur des polygones; on peut même choisir un point pris arbitrairement pour centre de similitude; alors étant donnée la position d'un des poly-

gones, celle de l'autre peut avoir deux positions. (*Fig.* 67.) En effet, soient ABCD, *abcd*, deux polygones semblables, et O leur centre de similitude, en prolongeant les diagonales OA, OB, OC, OD, d'une quantité égale et dans le sens inverse, on formera un nouveau polygone *a'b'c'd'* égal à ABCD, et dont les côtés homologues sont parallèles à ceux du polygone *abcd*; dans la première position, le centre de similitude est du même côté des deux polygones; dans la seconde position, le centre de similitude est intermédiaire.

296. (*Fig.* 66.) Il est facile de voir que toute droite FOK qui passe par le centre de similitude O de deux polygones semblables, les partage chacun en deux polygones respectivement semblables; FBAEK est semblable à *fbaek*, et FCDK est semblable à *fcdk*, et réciproquement toute droite qui partage de cette manière deux polygones semblables, et ayant leurs côtés homologues parallèles, passe nécessairement par le centre de similitude : une telle droite se nomme *axe de similitude*; il suit de ce qui précède que deux axes de similitude se coupent au centre de similitude.

297. (*Fig.* 67.) Si sur les deux côtés homologues BA, *ba*, *b'a'*, on construit les triangles semblables BAI, *bai*, *b'a'i'*, les points I et *i*, *i'* sont les sommets homologues des trois polygones semblables IBCDAI, *ibcdai*, *i'b'c'd'a'i'*; or, ces polygones ont le même centre de similitude que les trois premiers polygones : donc les trois points I, *i*, *i'* sont sur une même droite, passant par le

centre O de similitude, et cette droite peut ne rencontrer aucun des deux polygones; elle est aussi un *axe de similitude*.

298. Deux polygones égaux sont évidemment semblables, et lorsqu'ils sont placés dans la position parallèle, leur centre de similitude est situé à l'infini.

299. (*Fig.* 68.) Soit ABCDEF un polygone équilatéral, ayant les angles B = C = E = F, et supposons que la diagonale AD divise le polygone en deux parties symétriques, de sorte que les droites BF, CE sont perpendiculaires à AD, qui les divise en deux parties égales; il est évident qu'on aura AB, BC, CD, respectivement parallèles à DE, EF, AF; soit *abcdef* le polygone semblable, placé dans la position parallèle, on aura de même *ab*, *bc*, *cd*, respectivement parallèles à *de*, *ef*, *af*.

Considérons d'abord les lettres italiques écrites extérieurement au polygone, dès lors *a* est homologue à A, *b* à B, etc.; en menant des droites par ces points, on obtient le centre O de similitude; considérons les lettres italiques écrites dans l'intérieur du polygone; elles répondent aussi à des sommets homologues; donc en joignant par des droites les sommets homologues, elles se réunissent en un point *o* qui est un second centre de similitude : ainsi, ces sortes de polygones équilatéraux ont deux centres de similitude, l'un O externe, et l'autre *o* intermédiaire ou interne, et il est aisé de démontrer que la droite O *o* divise les côtés BC, EF, *bc*, *ef*, en parties proportionnelles aux côtés homologues des polygones.

Lorsque les deux polygones équilatéraux sont égaux, et placés dans la position parallèle, le centre de similitude externe est à l'infini, et le centre interne est le seul qui existe.

300. Soient P, P′, P″, trois polygones quelconques semblables, et placés dans la position parallèle ; et soit

E″ le centre de similitude de P et P′ ;
E′ *Id.* P, P″ ;
E *Id.* P′, P″.

Menons une droite par E″ et E′, elle sera axe de similitude pour P et P′ et pour P et P″ : elle sera donc axe de similitude entre P′ et P″, par conséquent, elle passera par le centre E de similitude (295) : donc les trois centres de similitude sont sur une même droite.

301. P, P′, P″, étant trois polygones semblables, équilatéraux comme dans le numéro 267.

Soient E″ le centre de similitude externe, et I″ le centre de similitude interne de P et P′ ;

E′ le centre de similitude externe, et I′ le centre de similitude interne de P et P″ ;

E le centre de similitude externe, et I le centre de similitude interne de P′ et P″.

On prouvera comme ci-dessus (300), que les six centres sont distribués trois à trois sur une même droite, savoir les trois centres externes et deux centres internes avec un externe, ce qui donne quatre droites.

302. On nomme *rayons homologues* deux droites, telles que O E, *o e*, ou OB, *o b*, qui vont d'un centre de similitude à deux sommets homologues; il est évident 1° que les

rayons homologues sont entre eux comme les côtés homologues; 2° que les périmètres des deux polygones semblables sont entre eux comme les rayons homologues; 3° que les surfaces des deux polygones sont entre elles comme les carrés des rayons homologues.

Lignes courbes semblables; propriétés des cercles comparés.

303. (*Fig.* 69.) Soit ABCDEF une ligne courbe quelconque, un arc de cercle, d'ellipse, de parabole, ou une ligne tracée au hasard; si par un point quelconque O, ou même des rayons OA, OB, OC, OD, etc., à tous les points de cette courbe, et qu'on divise tous ses rayons proportionnellement, de sorte que l'on ait OA : Oa : : OB : Ob : : OC : Oc : : OD : Od, etc., on obtient une nouvelle courbe *abcde*, qui est *semblable* à la première, et réciproquement lorsque deux courbes ABCDE, *abcde*, peuvent être mises dans une telle position, qu'elles divisent proportionnellement des rayons partis d'un même point, ces courbes sont *semblables*. (Note 8.)

Il est évident qu'à une même courbe ABCDE, correspondent une infinité de courbes semblables; car on peut diviser les rayons d'une infinité de manières en parties proportionnelles, on peut même prolonger les rayons dans les sens opposés Oa', Ob', Oc', etc., et la courbe $a' b' c' d' e' f'$ est aussi semblable; alors le centre de similitude O est situé entre les courbes.

304. Les polygones ABCDE, *abcde*, sont

semblables, et ont même centre de similitude que les courbes semblables dans lesquelles ils sont inscrits. La corde AB est plus petite que l'arc AB, la corde BC est plus petite que l'arc BC, etc. : donc le périmètre du polygone inscrit est plus petit que le périmètre de la courbe; mais plus la corde AB sera petite, moins elle différera de son arc; par conséquent, plus le nombre des côtés du polygone inscrit dans l'arc AF sera grand, et moins le périmètre différera de celui de la courbe; il en est de même des polygones inscrits dans la courbe semblable *abcde*; donc on aura, 1° les périmètres des deux arcs semblables, interceptés entre deux rayons homologues, sont entre eux comme ses rayons; 2° les aires des secteurs semblables AOE, *aoe*, sont entre elles comme les carrés des rayons homologues.

On nombre *secteurs semblables* les trilatères mixtes AOE, formés par deux rayons OA, OF, et un arc de courbe AE.

305. Une droite AT est *tangente* à une courbe, lorsqu'elle n'a qu'un seul point A de commun avec cette courbe; menant par le point *a* une parallèle *at* à AT, elle sera aussi tangente à la courbe *abcde;* en effet, soit T l'intersection de la tangente avec un rayon AB, et *t* l'intersection de la parallèle *al* avec le même rayon; puisque AI est une tangente, il faut donc que T soit hors de la courbe, et que l'on ait $OT > OB$; or, on a la proportion

$$OA : Oa :: OT : Ot :: OB : Ob ;$$

OT est plus grand que OB; donc Ot est plus grand que Ob, et par conséquent le point *t*

est hors de la courbe *abcde*; or, on peut prendre le rayon OB aussi près qu'on veut de OA, et la conclusion sera la même : donc la parallèle *al* a tous ses points hors de la courbe *abcde*, et par conséquent est une tangente à cette courbe, et en général les tangentes menées à deux points homologues de deux courbes semblables, ayant un centre de similitude, sont parallèles.

Deux cercles comparés.

306. Les circonférences sont des courbes semblables; en effet, on peut placer ces circonférences de manière à être *concentriques*; alors le centre est évidemment un centre de similitude, et les rayons des circonférences sont des rayons homologues; par conséquent, 1° les arcs des cercles interceptés entre les mêmes rayons, sont entre eux comme ces rayons; 2° les circonférences sont entre elles comme leurs rayons; 3° les secteurs circulaires interceptés, entre les mêmes rayons, sont entre eux comme les carrés des rayons; 4° les aires des cercles sont entre elles comme les carrés des rayons; 5° deux arcs semblables, ayant même corde, sont égaux.

307. (*Fig.* 70.) C et C′ étant les centres des deux circonférences, R et R′ leurs rayons si on divise la distance CC′ en segmens additifs et proportionnels aux rayons, le point de division I sera le centre de similitude; car, menant deux rayons quelconques CM, C′M′, parallèles, on aura CI : C′I : : CM : C′M : donc les trois points M, I, M′, sont sur une même droite, et l'on aura constamment CM : C′M′ : : CI : C′I : : R : R′, par conséquent M et

M′ sont deux points homologues ; le point I est le *centre de similitude interne;* si l'on divise CC′ en deux segmens *soustractifs* I′C, I′C′, de manière que l'on ait I′C : I′C′ :: R : R′, le point I′ sera un centre de similitude *externe;* en effet, prolongeant CM jusqu'en L, on aura CI′ : C′I′ :: CL : C′M′ : donc les trois points L, M′, I′ sont sur une même droite, et l'on a I′M : I′L :: *r* : R ; ainsi les points M′ et L sont homologues relativement à I′ : il s'ensuit que la droite CI′ est divisée harmoniquement en I et C′ : donc si l'on décrit une circonférence sur CC′, comme diamètre, la polaire de I′ passera par le point I.

308. Si les cercles C et C′ se touchent extérieurement, le point de contact N est le centre de similitude interne ; si C et C′ se touchent intérieurement, le point de contact N est un centre de similitude externe ; car la distance des deux centres est divisée par le point de contact, dans le premier cas, en segmens additionnels, et dans le second cas, en segmens soustractifs proportionnels aux rayons, et ses segmens sont les rayons mêmes.

309. (*Fig.* 71.) Lorsque les cercles sont placés comme dans la *fig.* 71, les points I et I′ sont les rencontres des tangentes communes RIR′, SIS′, et KK′ I′, LL′I′, qu'on peut mener aux deux cercles ; car soit I′K′ une tangente au cercle C′, abaissez la perpendiculaire CK, on a la proportion

$$IC' : IC :: C'K' : CK :: R' : R\,;$$

or $C'K' = R'$, donc $CK = R$, par conséquent K est sur la circonférence C ; on raisonnerait de même par rapport aux deux autres tangentes.

Les triangles semblables CKI′, C′K′I′ donnent $CK : C'K' :: CI' : C'I'$;

d'où $CK - C'K' : CK :: CC' : CI'$;

$CK - C'K' : C'K' :: CC' : C'I'$;

d'où $$CI' = \frac{CC' \, . \, CK}{CK - C'K'};$$

$$C'I' = \frac{CC' \, . \, C'K'}{CK - C'K'};$$

et $$CD = \frac{CK^2}{CI'} = \frac{CK - C'K' \, . \, CK}{CC'};$$

$$C'D' = \frac{C'K'^2}{C'I'} = \frac{CK - C'K' \, . \, C'K'}{CC'};$$

$$CD - C'D' = \frac{(CK - C'K')^2}{CC'};$$

$$CD + C'D' = \frac{CK^2 - C'K'^2}{CC'}.$$

310. Les propositions, relatives aux points et aux lignes homologues, aux axes de similitude des polygones semblables, s'appliquent également aux courbes semblables, par conséquent aux circonférences; d'où nous concluons : 1° les cordes KL, K′L′ sont homologues, ainsi que les cordes RS et R′S′; 2° les propositions 291 et 301 sont encore vraies, lorsque P, P′, P″ sont des circonférences de cercles; 3° si la circonférence C″ (*fig.* 72) touche les deux circonférences C et C′ en I et I′ extérieurement, ces deux points de contact et le centre de similitude extérieur E de C et C′, sont sur une même droite; 4° il en est de même si la circonférence C″ est touchée intérieurement par les deux autres; 5° si C″ est touchée extérieurement

par l'une, et intérieurement par l'autre circonférence, les deux points de contact sont sur une même droite, avec le centre de similitude interne des deux circonférences touchées.

311. (*Fig.* 72.) La droite EII'M rencontre les trois cercles en quatre points N, I', I, M; N et I sont homologues; il en est de même des deux points I', M: donc les deux tangentes NY, IX sont des droites homologues aux cercles C, C', et par conséquent parallèles; mais la tangente XI'Y est une droite homologue commune aux deux cercles C', C'': donc les points X, Y sont des points homologues aux cercles C', C''; on démontrera de même que les points X, Z, sont homologues aux deux cercles C et C''; donc, si par les points Y, X, Z, on abaisse les droites XV, YD', ZD, perpendiculaires à CC', elles seront homologues, savoir XV, YD', par rapport aux cercles C', C'' et XV, ZD, par rapport aux cercles C et C''; YK'L', ZKL, sont les polaires respectives du point E dans les cercles C' et C; ainsi, la droite XV est une homologue commune aux deux polaires KL, K'L'; elle conserve toujours la même position, quelle que soit celle du cercle C''; en effet, l'on a

$$C'X^2 = C'I'^2 + XI'^2;$$

$$CX^2 = CI^2 + XI^2;$$

donc $CX^2 - C'X^2 = CI^2 - C'I'^2 = CV^2$

$$- C'V^2 = (CV + C'V)(CV - C'V)$$

$$= CC' . CV - C'V;$$

d'où $CV - C'V = \dfrac{CI^2 - C'I'^2}{CC'} = CD + C'D'$.

(309).

d'où $$CV - CD = C'D' + C'V,$$
ou bien $$DV = D'V.$$

Ainsi, la droite XVW est à égale distance des deux polaires KL, K'L', communes au centre E de similitude extérieur; on prouve de la même manière qu'elle est à égale distance des deux polaires communes au centre de similitude intérieur. Etant donc donnés deux cercles C, C', la droite XVW est déterminée de position; nous la désignerons donc sous le nom de *ligne disomologue*, dénomination qui rappèle la propriété d'être deux fois homologues. On l'a aussi appelée *axe radical*; nous ignorons la raison de cette dénomination. (Mémoire de M. Gautier, *Journal de l'école polytechnique*, seizième cahier.) Cette ligne est très-utile dans la solution des problèmes relatifs aux contacts des cercles.

312. (*Fig.* 72.) Les quatre tangentes que, du point X, on peut mener aux deux cercles C et C', sont évidemment égales entre elles: donc la ligne disomologue jouit encore de cette propriété, que les quatre tangentes, menées de chacun de ses points aux deux cercles, sont égales entre elles.

313. Cette propriété donne un procédé facile de construire la disomologue. Soient C et C' (*fig.* 72 *bis*) les deux cercles donnés; d'un point quelconque K comme centre, et d'un rayon suffisamment grand, on décrit une circonférence coupant C en M, N et C' en M', N'; l'intersection des cordes MN, M'N', est sur la disomologue, car les quatre tangentes menées du point R aux deux cercles sont égales. Ainsi RS perpendiculaire à CC' est donc la disomo-

logue cherchée ; cette construction a même lieu lorsque le cercle C est entièrement entouré par le cercle C'.

314. Lorsque les deux cercles se coupent, la droite d'intersection est la disomologue des deux cercles.

315. Lorsque les deux cercles se touchent, leur ligne disomologue se confond avec la tangente au point de contact.

316. (*Fig.* 73.) Soient les trois cercles C, C', C''', touchés extérieurement en I, I', I''', par le cercle C''; soient KL, K'L', XN, les polaires homologues et la ligne disomologue par rapport aux cercles C, C', et RS, L'''K''', NZ, les lignes analogues par rapport aux cercles C, C'''; l'intersection N des deux disomologues, l'intersection D des deux polaires RS, KL et le point de contact I sont sur une même droite. En effet, les droites XN, KL, sont homologues par rapport aux cercles C, C''; les droites KS, ZN, sont homologues par rapport aux mêmes cercles : donc les intersections N et D sont des points homologues, et la droite qui les joint passe par le centre I de similitude.

317. (*Figure* 73.) De là découle un moyen simple de résoudre le problème LX, p. 155; car on peut toujours trouver les points N et D (247); le point I, où la droite ND coupe le cercle C, est un point de contact; par la même méthode on trouve le point I', et l'intersection des rayons CI, C'I', donnera le centre C'' du cercle cherché; il est facile de voir ce qu'il faut faire lorsque le cercle doit toucher autrement qu'il n'est indiqué par la figure (267).

318. (*Fig.* 72.) Plus le rayon du cercle CI diminue, et plus la polaire KL se rapproche du centre; lorsque le rayon est nul, cette polaire passe par le centre (*fig.* 73 *bis*). On voit donc ce qu'il faut faire pour mener une circonférence C'', passant par le point donné C, et devant toucher les cercles donnés C', C'''.

La *figure* 73 *ter* montre les constructions pour mener une circonférence C'' qui touche le cercle donné C' et passe par les points donnés C, C'''.

319. (*Fig.* 74.) Si le rayon du cercle C''' devient infiniment grand, le cercle se change en une droite C''', alors la polaire RS devient tangente au cercle C et parallèle à la droite C''', qui se confond avec sa disomologue. Les points D et N se déterminent comme dans le problème précédent; et la droite RI coupe la droite donnée au point de contact I'''. Il est aisé de voir comment il faut s'y prendre lorsque deux des cercles sont remplacés par des droites ou par un point et une droite.

Les *fig.* 73 à 74 *ter* représentent ces divers cas, avec les constructions qui s'y rapportent, savoir :

1° Trois cercles C, C', C''' (*fig.* 73).

2° Deux cercles C', C''', le point C (*fig.* 73 *bis*).

3° Un cercle C' et deux points C, C''' (*fig.* 73 *ter*).

4° Un cercle C, une droite C'', un point C' (*fig.* 74).

5° Un cercle C, deux droites C', C''' (*fig.* 74 *bis*).

6° Deux cercles C, C', et une droite C''' (*fig.* 74 *ter*).

Le cercle cherché est partout désigné par C″. (Voir Note 9.)

Calcul des triangles, ou Trigonométrie.

320. Nous avons vu, ci-dessus page 96, que dans tous les triangles équiangles entre eux les rapports entre les côtés sont invariables ; il suffit donc de connaître ces rapports dans un de ces triangles, alors on les connaîtra aussi dans tous les triangles semblables. Pour la facilité des calculs on ne considère d'abord que les triangles rectangles.

(*Fig.* 75.) Soit donc BAC un triangle rectangle en A, les trois côtés donnent lieu à six rapports, savoir :

$$\frac{AB}{BC}, \frac{BC}{AB}, \frac{AC}{BC}, \frac{BC}{AC}, \frac{AB}{AC}, \frac{AC}{AB}.$$

Pour les distinguer, on a donné divers noms à ces rapports ; désignons par p le côté AB opposé à l'angle C, et par a le côté AC, adjacent à l'angle C, et par R l'hypothénuse BC, les six rapports deviennent.

$$\frac{p}{R}, \frac{R}{p}, \frac{a}{R}, \frac{R}{a}, \frac{p}{a}, \frac{a}{p}.$$

Le premier rapport $\frac{p}{R}$ a été désigné sous le nom de *sinus* de l'angle C.

Le deuxième rapport $\frac{R}{p}$ a été désigné sous le nom de *cosécante* de l'angle C.

Le troisième rapport $\frac{a}{R}$ a été désigné sous le nom de *cosinus* de l'angle C.

Le quatrième rapport $\frac{R}{a}$ a été désigné sous le nom de *sécante* de l'angle C.

Le cinquième rapport $\frac{p}{a}$ a été désigné sous le nom de *tangente* de l'angle C.

Le sixième rapport $\frac{a}{p}$ a été désigné sous le nom de *cotangente* de l'angle C.

Nous verrons plus loin l'origine de ces dénominations. Ces définitions peuvent s'écrire ainsi :

$\frac{p}{R}$ = sinus angle C, ou en abrégeant :

(1) $\frac{p}{R}$ = sinus C,

(2) $\frac{R}{p}$ = cosécante C,

(3) $\frac{a}{R}$ = cosinus C,

(4) $\frac{R}{a}$ = sécante C,

(5) $\frac{p}{a}$ = tangente C,

(6) $\frac{a}{p}$ = cotangente C,

321. Multipliant l'équation (1) par l'équation (2), il vient

$$\frac{p}{R}\times\frac{R}{p}=\text{sin. C coséc. C}=1\,;$$

on trouve de même

$$\text{cos. C}\times\text{séc. C}=1,$$
$$\text{tang. C}\times\text{cot. C}=1\,;$$

d'où l'on tire $\text{coséc. C}=\frac{1}{\text{sin. C}}$,

$$\text{séc. C}=\frac{1}{\text{cos. C}},$$

$$\text{cot. C}=\frac{1}{\text{tang. C}},$$

Il suffit donc de connaître les trois rapports sin. C, cos. C, tang. C, pour en conclure les trois autres.

322. On a

$$\text{sin.}^2\text{C}+\text{cos.}^2\text{C}=\frac{p^2}{R^2}+\frac{a^2}{R^2}=\frac{p^2+a^2}{R^2}=1\,;$$

car le triangle étant rectangle, l'on a $R^2=p^2+a^2$;
donc $\text{cos. C}=\sqrt{1-\text{sin.}^2\text{C}}$.

Ainsi, connaissant le rapport sin. C, on en déduit cos. C.

En divisant, on obtient

$$\frac{\text{sin. C}}{\text{cos. C}}=\frac{\frac{p}{R}}{\frac{a}{R}}=\frac{p}{a}=\text{tang. C}.$$

Au moyen de sin. C on peut donc trouver d'abord cos. C, et ensuite tang. C. Ainsi, il

suffit de connaître le rapport sin. C pour en déduire les cinq autres ; il en est de même d'un autre rapport ; par exemple connaissant tang. C, on en conclura les cinq autres.

323. Si nous considérons ces rapports relativement à l'angle B, on obtient, par la définition,

$$\frac{a}{R} = \text{sin. B},$$
$$\frac{R}{a} = \text{coséc. B},$$
$$\frac{p}{R} = \text{cos. B},$$
$$\frac{R}{p} = \text{séc. B},$$
$$\frac{a}{p} = \text{tang. B},$$
$$\frac{p}{a} = \text{cot. B}.$$

En comparant ces équations avec celles du numéro 320, on obtient celles-ci :

$$\begin{aligned} &\text{sin. C} = \text{cos. B}, \\ &\text{cos. C} = \text{sin. B}, \\ &\text{tang. C} = \text{cot. B}, \\ &\text{cot. C} = \text{tang. B}, \\ &\text{séc. C} = \text{coséc. B}, \\ &\text{coséc. C} = \text{séc. B}, \end{aligned}$$

C'est cette relation existant entre les angles B, C du même triangle rectangle qui a donné lieu aux dénominations de *cosinus*, *cotangente*, *cosécante*.

B étant le complément de l'angle C, on a

$$B = 1^q - C = 90^\circ - C.$$

On peut donc écrire les six relations de cette manière

$$\begin{aligned}
\text{sin.}\ C &= \text{cos.}\ (90^\circ - C),\\
\text{cos.}\ C &= \text{sin.}\ (90^\circ - C),\\
\text{tang.}\ C &= \text{cot.}\ (90^\circ - C),\\
\text{cot.}\ C &= \text{tang.}\ (90^\circ - C),\\
\text{séc.}\ C &= \text{coséc.}\ (90^\circ - C),\\
\text{coséc.}\ C &= \text{séc.}\ (90^\circ - C),
\end{aligned}$$

324. Faisons $C = 45^\circ$,

on aura $90^\circ - C = 45^\circ$;

d'où

$$\begin{aligned}
\text{sin.}\ 45^\circ &= \text{cos.}\ 45^\circ,\\
\text{tang.}\ 45^\circ &= \text{cot.}\ 45^\circ,\\
\text{séc.}\ 45^\circ &= \text{coséc.}\ 45^\circ,
\end{aligned}$$

De (322) on tire

$$\text{sin.}^2\ 45^\circ + \text{cos.}^2\ 45^\circ = 1 \text{ ; d'où}$$

$$2\ \text{sin.}^2\ 45^\circ = 1,$$

$$\text{sin.}\ 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}7071068 = \text{cos.}\ 45^\circ,$$

$$\text{tang.}\ 45^\circ = 1 = \text{cot.}\ 45^\circ,$$

$$\text{séc.}\ 45^\circ = \sqrt{2} = 1{,}4142136 = \text{coséc.}\ 45^\circ,$$

Ainsi, nous connaissons les six rapports pour l'angle de 45°.

325. (*Fig.* 76.) Multipliant cos. C par sin. C (320), l'on obtient

$$\text{sin.}\ C\ \text{cos.}\ C = \frac{ap}{R^2}.$$

Soit I le milieu de BC, et AP la hauteur du triangle rectangle : or, le double de l'aire BAC est égal à $BC \times AP$,

et encore à $AB \times AC$;

d'où $AB \times AC = BC \times AP$,

ou bien $ap = R \times AP$,

et $$\frac{ap}{R^2} = \frac{AP}{R} = \text{sin.}\ C\ \text{cos.}\ C.$$

Or, $\frac{AP}{AI} = \sin. AIP = \sin. 2C$ (57),

$$\frac{AP}{2AI} = \frac{AP}{R} = \frac{\sin. 2C}{2} = \sin. C \cos. C;$$

d'où $\sin. 2C = 2 \sin. C \cos. C$ (A).

Au moyen de cette expression, on peut calculer les six rapports pour l'angle 2 C, lorsqu'on connaît ces rapports pour l'angle C.

326. (*Fig.* 76.) Faisons $C = 30^\circ$, alors $AIB = ABI = 60^\circ$; donc le triangle AIB est équilatéral, et l'on a $AB = BI = \frac{1}{2} BC$;

$$\text{donc} \quad \sin. 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{2AB} =$$
$$= \frac{1}{2} = 0,500000 = \cos. 60^\circ,$$

$$\text{coséc.} 30^\circ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= 0,8660254 = \sin. 60^\circ,$$

$$\text{tang.} \ 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5773503 =$$
$$= \cot. 60^\circ,$$

$$\cot. \ 30^\circ = \sqrt{3} = 1,7320508 =$$
$$= \text{tang.} \ 60^\circ,$$

$$\text{séc.} \ 30^\circ = \frac{1}{\cos. 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} =$$
$$= 1,1547005 = \text{coséc.} \ 60^\circ,$$

$$\text{coséc.} 30^\circ = \frac{1}{\sin. 30^\circ} = 2 = \text{séc.} \ 60^\circ.$$

327. (*Fig.* 77.) Supposons maintenant que

l'hypothénuse R, conservant toujours même grandeur, on fasse prendre à l'angle aigu C toutes les valeurs possibles, on aura une suite de triangles CAB, CA'B', CA''B'', etc., dont les sommets B sont une circonférence ayant C pour centre, et l'hypothénuse R pour rayon. On a construit des tables qui renferment les valeurs des six rapports (320) pour chacun de ces triangles. Ces tables sont connues sous le nom de *Tables des sinus naturels*, du nom d'un des rapports; le plus ordinairement elles renferment les valeurs qui croissent de minute en minute, depuis o jusqu'à 90°: et, pour le premier degré, de seconde en seconde; par exemple, soit C = 16°. 13', les tables donnent pour cet angle :

$$\frac{AB}{BC} = \text{sin. } 16°.13' = 0{,}2792704 = \text{cos. } 73°.47'$$

$$\frac{AC}{BC} = \text{cos. } 16°.13' = 0{,}9602125 = \text{sin. } id.$$

$$\frac{AB}{AC} = \text{tang. } 16°.13' = 0{,}2908423 = \text{cot. } id.$$

$$\frac{AC}{AB} = \text{cot. } 16°13' = 3{,}4382891 = \text{tang. } id.$$

$$\frac{BC}{AC} = \text{séc. } 16°.13' = 1{,}0414362 = \text{coséc. } id.$$

$$\frac{BC}{AB} = \text{coséc. } 16°.13' = 3{,}5807586 = \text{séc. } id.$$

et ainsi des autres angles.

On n'a besoin que de calculer les triangles qui correspondent à des valeurs de C, compris entre o et 45°; ensuite les mêmes triangles

reviennent : ainsi, pour $C = 46^\circ$, on a le même triangle que pour $C = 44^\circ$;

car $\sin. 46^\circ = \cos. 44^\circ$ (306),

$\cos. 46^\circ = \sin. 44^\circ$, etc.

Or 45° renferment 2700 minutes ; il faut donc calculer autant de triangles pour construire des tables de sinus dont les angles croissent de minute en minute.

328. On a rangé aussi en tables les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes ; et on aime mieux employer ces tables que celles des sinus ordinaires ou naturels, à cause de la grande facilité que présentent les calculs par logarithmes : il y a des tables qui donnent en même temps les rapports et leurs logarithmes en regard ; mais celles dites de *Callet* ne donnent que ces derniers, et on y trouve expliquée la manière de s'en servir, par exemple on a :

$$\begin{aligned}
&\text{Log. sin. } 16^\circ.13' = 0{,}4460250 - 1\\
&\text{Log. cos. } 16^\circ.13' = 0{,}9823674 - 1\\
&\text{Log. tang. } \ldots\ldots = 0{,}4636576 - 1\\
&\text{Log. cot. } \ldots\ldots = 0{,}5363424\\
&\text{Log. séc. } \ldots\ldots = 0{,}0176326\\
&\text{Log. coséc. } \ldots\ldots = 0{,}5539750.
\end{aligned}$$

Il faut remarquer qu'on a toujours

$$\begin{aligned}
&\text{Log. tang.} + \text{log. cotang.} = 0\\
&\text{Log. sin.} + \text{log. coséc.} = 0\\
&\text{Log. cos.} + \text{log. séc.} = 0\,;
\end{aligned}$$

c'est une conséquence des équations (320).

329. (*Fig.* 77.) L'arc LB étant la mesure de l'angle ACB, on rapporte à cet arc le sinus et le cosinus de l'angle ; ainsi le sinus de l'arc BL est égal $\frac{AB}{BC}$; son cosinus est égal

$\frac{AB}{BC}$; si on prend pour rayon l'unité de longueur, un mètre, par exemple, alors BC = 1; et l'on a

$$\text{Sin. } BL = AB$$
$$\text{Cos. } BL = AC$$
$$\text{Tang. } BL = \frac{AB}{AC}$$
$$\text{Cot. } BL = \frac{AC}{AB}$$
$$\text{Séc. } BL = \frac{1}{AC}$$
$$\text{Coséc. } BL = \frac{1}{AB}.$$

Les lignes AB, AC sont exprimées en mètres.

Si on mène en L une tangente rencontrée par le rayon CB prolongé, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \frac{LM}{LC} = \frac{AB}{AC} = \text{tang. } BL = LM \\ \frac{CM}{LC} = \frac{CB}{AC} = \text{séc. } BL = CM\,; \end{array}\right\} \text{car } LC = 1.$$

Menant par l'extrémité N du cadran LN, une tangente rencontrée en T par le rayon CM prolongé, on obtient, à cause des triangles semblables CMT, CAB.

$$\frac{NT}{CN} = \frac{AC}{AB} = \text{cot. } BL = NT$$
$$\frac{CT}{CN} = \frac{CB}{AB} = \text{coséc. } BL = CT.$$

Les six lignes AB, AC, ML, CM, NT, CT

sont désignées sous le nom de *lignes trigonométriques* de l'arc AM ; le rayon étant pris pour unité de mesure, alors AB est le sinus, AC le cosinus, ML la tangente, CM la sécante, NT la cotangente, CT la cosécante de l'arc AB ; lorsque cet arc devient égal au cadran LN, le sinus CN est égal à l'unité, le cosinus est nul ; la tangente et la sécante sont infinies, la cotangente et la cosécante sont nulles. A ces six lignes, on y joint encore deux autres, les lignes AL, DN, qu'il est quelquefois très-utile de connaître ; AL est le sinus-verse et DN le cosinus-verse de BL. Il est évident qu'on a

sin. vers. BL = AL = CL — CA = 1 — cos. BL
cos. vers. BL = DN = CN — CD = 1 — sin. BL.

Il y a des tables qui donnent ces deux lignes ; on ne les trouve pas dans celles de Callet.

Exemple : sin. vers. 16°.13′ = 0,0397875
cos. vers. *id.* = 0,7207296
log. sin. v. *id.* = 0,5997468—2
log. cos. v. *id.* = 0,8577723—1.

330. En prolongeant la perpendiculaire AB, jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau la circonférence en K, on aura AB = $\frac{1}{2}$ BK ; ainsi le sinus de l'arc BL est la moitié de la corde de l'arc double BLM : de là dérive l'origine du mot *sinus*, car anciennement on nommait les cordes des *inscrites*, en latin *inscriptæ*, et les demi-cordes des *semi-inscriptæ* ; et, par abréviation, ne prenant que les lettres initiales *s. ins.*, on a fini par lire *sinus*. Lorsque le rayon n'est pas pris pour l'unité, le sinus de l'arc AB est égal au rapport $\frac{AB}{BC}$, ou bien à $\frac{BK}{BD}$, BD

étant le diamètre ; ainsi le sinus d'un arc est égal à la corde de l'arc double divisé par le diamètre.

331. Le sinus d'un angle inscrit dans la circonférence est égal au sinus de la moitié de l'arc intercepté (155) : or, ce dernier sinus est égal à la corde de l'arc double divisé par le diamètre : donc le sinus d'un angle inscrit est égal à la corde de l'arc intercepté divisé par le diamètre. De là on conclut : 1° les sinus des angles inscrits dans la même circonférence sont entre eux comme les cordes des arcs interceptés ; 2° dans un triangle, les sinus des angles sont entre eux comme les côtés opposés à ces angles ; car on peut toujours faire passer une circonférence par les trois sommets, et les côtés deviennent alors les cordes des arcs interceptés.

332. (*Fig.* 78.) Soit ABCD un quadrilatère inscrit, et AC un diamètre ; les deux angles B et D seront droits, et les angles CAB, BCA, ainsi que les angles DAC, DCA, sont complémens l'un de l'autre : d'après ce qui précède (331), l'on a

$$\sin.\ BCA = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin.\ CAB = \cos.\ BCA = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin.\ ACD = \frac{AD}{AC}$$

$$\cos.\ ACD = \frac{DC}{AC}$$

$$\sin.\ BCD = \frac{BD}{AC} :$$

d'ou l'on tire : sin : BCA cos. ACD + cos. BCA

$$\times \sin.\ BCD = \frac{AB.DC + BC.AD}{AC^2};$$

or AB. DC + BC. AD = AC. BD (239) ; d'où sin. BCA cos. ACD + cos. BCA sin. ACD

$$= \frac{AC.BD}{AC^2} = \frac{BD}{AC} = \sin.\ BCD = \sin.\ (BCA + ACD)$$

soit

$$BCA = b$$

$$ACD = a;$$

il vient : $\sin.\ (a + b) = \sin.\ a \cos.\ b. + \sin.\ b \cos.\ a$ (B)

Cette formule sert à calculer le sinus de la somme de deux arcs, lorsqu'on connaît les sinus et cosinus de chacun d'eux : ainsi, connaissant le sinus de 1°, on peut calculer le sinus de 2°, et ensuite de 3°, et ainsi de suite ; si on fait $a = b$, on trouve, $\sin.\ 2\,a = 2 \sin.\ a \cos.\ a$, ce qui s'accorde avec la formule A (325).

Prenant l'arc CD′ égal à l'arc CD, et menant la corde BD′, on aura, dans le quadrilatère inscrit BD′ CA, l'équation

$$BD' \times AC = BC \times AD' - AB \times CD', \quad \text{et}$$

$$\frac{BD' \times AC}{AC^2} = \frac{BC}{AC} \times \frac{AD'}{AC} - \frac{AB}{AC} \times \frac{CD'}{AC} = \frac{BD'}{AC}.$$

Or, $\frac{BD'}{AC}$ est le sinus de l'angle.

$$BCD' = ACD' - BCD' = a - b:$$

donc $\sin.\ (a - b) = \cos.\ b \sin.\ a - \sin.\ b. \cos.\ a$.

Portant CD de A en E, l'arc O′BAE sera égal à 180° ; et l'arc BAE est le supplément de

l'arc BD′ ; par conséquent la moitié de l'arc BAE est le complément de la moitié de l'arc BD′, ou, ce qui revient au même, l'angle BCE est le complément de l'angle D′CB :

donc sin. DCE $=$ cos. D′CB $=$ cos. $(a-b)$.

Or, le quadrilatère inscrit BAEC donne l'équation $BE \times AC = AB \times CE + AE \times BC$,

et $$\frac{BE}{AC}=\frac{AB}{AC}\times\frac{CE}{AC}+\frac{AE}{AC}\times\frac{BC}{AC}.$$

Or, $$\frac{BE}{AC}=\text{sin. BCE}=\text{cos.}\ (a-b) :$$

donc cos. $(a-b)=$ sin. b sin. $a+$ cos. a cos. b.

Faisant CE′ $=$ AB, l'arc BCE′ et une demi-circonférence, et par conséquent la moitié de l'arc DE′, où l'angle E′BD est le complément de la moitié de l'arc BCD ou de l'angle BAD : donc

sin. E′BD $=$ cos. BAD $=$ cos. $(180°-a-b)$.

Or, cos. $(180°-(a+b))$

$=$ cos. $180°$. cos. $(a+b)+$ sin. $180°$.sin $(a+b)$

$= -$ cos. $(a+b)$;

donc sin. E′BD $= -$ cos. $(a+b)$;

et l'on tire du quadrilatère ABDE′ l'équation

cos. $(a+b)=$ cos. a cos. $b-$ sin. b.

On voit donc que les formules 20 et 21 de la table 8 ne sont que l'expression de la propriété du quadrilatère inscrit. Lorsque les arcs a et b dépassent la demi-circonférence, les formules sont encore applicables. On parvient à le démontrer à l'aide des équations (1) et (2) de la même table.

333. (*Fig.* 78.) Abaissant la perpendiculaire BQ sur le diamètre AC, l'on a

$$\sin.\ \text{angle}\ ACB = \sin.\tfrac{1}{2}\ \text{arc}\ AB = \frac{AB}{AC},$$

$$\text{d'où : } \sin.^2\tfrac{1}{2}AB = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AC\,.\,AQ}{AC^2} = \frac{AQ}{AC}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ \sin.\ \text{vers.}\ AB\ (C\ )$$

$$2\ \sin.^2\tfrac{1}{2}\ AB = \sin.\ \text{vers.}\ AB.$$

Ainsi, deux fois le carré du sinus de la moitié d'un arc est égal au sinus-verse de l'arc ; or, connaissant le sinus d'un arc, on peut en calculer le sinus-verse, et par conséquent le sinus de la moitié de cet arc ; ensuite le sinus du quart de cet arc, etc.

On connaît le sinus de 45° (324) ; ainsi, on connaîtra donc consécutivement les sinus des arcs de 22°. 30′, 11°. 15′, 5°. 37′. 30″, 2°. 48′. 45″, 1°. 22″. 24 30‴, etc. On voit par là comment on a pu parvenir à calculer les tables des sinus naturels.

334. En abaissant du sommet d'un triangle une perpendiculaire sur le côté opposé, on décompose le triangle en deux triangles rectangles ; par conséquent on pourra se servir du calcul de ces derniers triangles et les appliquer à des triangles quelconques (*fig.* 77) ; alors, lorsqu'il s'agit d'un angle obtus tel que LCB‴, ayant pour mesure l'arc LB‴ plus grand qu'un cadran, son sinus sera B‴A‴ le même que celui de l'arc B‴ R, supplément de l'arc LB‴ ; par exemple, le sinus de l'arc de 150° est le même que celui de l'arc de 30°, et sin. 90° = cos. 0° = 1.

Le cosinus de l'arc LB″ est CA‴ le même que celui de l'arc B‴ R ; le sinus-verse est LA‴ = LA + CA‴ ; ainsi le sinus-verse est égal au rayon plus le cosinus ; mais lorsque

l'arc est moindre qu'un cadran, nous avons vu, (329), que le sinus-verse est égal au rayon moins le cosinus.

On peut conserver ce dernier énoncé et l'appliquer même aux arcs plus grands qu'un cadran, pourvu qu'on prenne le cosinus négativement ; car la soustraction d'une quantité négative se réduit à faire une addition.

Ainsi le cosinus d'un angle obtus est égal au cosinus de l'angle aigu adjacent, pris négativement (table 8).

USAGE DES TABLES DE SINUS POUR LE CALCUL DES TRIANGLES.

Triangles rectangles.

335. PROBLÈME LXII. (*Fig.* 79.) L est un tour dont il s'agit de trouver la hauteur ?

Solution. L'instrument K, propre à mesurer des angles, (153), est fixé en M à une distance MN du pied de la tour, égale à 120^m ; K, angle à trouver ; l'angle $BCA=16^o.\ 13'$; c'est celui que fait le rayon visuel dirigé vers le sommet B avec l'horizontale CA ; ainsi, dans le triangle rectangle BCA l'on a

$$AC=120^m,$$
$$ACB=16^o.\ 13',$$
$$\frac{AB}{AC}=\text{tang.}\ \ 16^o.\ 13'$$

Les tables donnent

$$\text{tang.}\ 16^o\ 13'=0{,}2908423 :$$

donc $AB=AC.\ \ 0{,}2908423=120.0{,}2908423$
$$=34{,}901076.$$

Ajoutant la hauteur de l'instrument, qu'on

suppose égale à 2^m, il vient $NB=37^m$, environ.

En opérant par logarithme,

log. tang. 16°, $13'=0,4636576-1$,

log. $120=2,0791812$,

log. $AB=1,5428388=$log. $34,901$;

d'où $AB=34,901$, comme dessus.

PROBLÈME LXIII. (*Fig.* 79.) Avec les mêmes données trouver la distance BK.

Solution. L'on a $\frac{BK}{AC}=$ sécante 16°. $13'$;

d'où $BK=AC$. séc 16°. $13'=120$. $1,0414362$
$=124,972344$.

Par logarithme,

log. séc. 16°. $13'=0,0176326$,

log. $120=2,0761812$,

log. $BK=2,0968138=$l. $124,97$.

PROBLÈME LXIV. (*Fig.* 79.) Dans le triangle rectangle on connaît les deux côtés AC, AB de l'angle droit; trouver les angles aigus.

Solution. Soit $AB=34,901$,
$AC=120$,

on aura

$$\text{tang. } ACB=\frac{AB}{AC}=\frac{34,901}{120}=0,2908423.$$

Cherchant dans les tables l'arc qui correspond à cette tangente, on trouve

$ACB=16^o$, $13'$,

et par conséquent $ABC=73^o$. $47'$.

PROBLÈME LXV. (*Fig.* 79.) Dans le triangle rectangle ABC, on connaît un côté de l'angle droit et l'hypothénuse : trouver les angles et le second côté de l'angle droit?

Solution. Soit $BC=124,97$
$AC=120$,

on aura $\cos.ACB=\frac{120}{124,97}=0,9602125=$
$\cos.\ 16^{\circ}.\ 13'$,

et à l'aide de l'angle ACB on calculera AB.

Triangles obliquangles.

PROBLÈME LXVI. Connaissant un côté et deux angles d'un triangle, trouver les deux autres côtés et le troisième angle ?

Solution. (*Fig*. 80.) Soit dans le triangle ABC,

$$AB=120^{m.},$$
$$A=50^{\circ},\ 10',$$
$$B=100.$$

On en conclut $C=180^{\circ}-A-B=29^{\circ}.50'$. Or, l'on a (331)

$$\frac{AC}{\sin.\ 100^{\circ}}=\frac{AB}{\sin.\ 29^{\circ}.50};$$

d'où $AC=\frac{AB.\sin.\ 100^{\circ}}{\sin.\ 29^{\circ}.50}=\frac{AB\sin.\ 80^{\circ}}{\sin\ 29^{\circ}.\ 50}$;

car $\sin.\ 100^{\circ}=\sin.\ (180^{\circ}-100)$ (334),
et $\sin.\ 80^{\circ}=\cos.\ 10^{\circ}$.

Opérant par logarithmes, on trouve

$$\log.\ AB.=2,0791812,$$
$$\log.\ \sin.\ 80^{\circ}=0,9933515-1,$$

$$\log.\ AB.\ \sin.\ 80^{\circ}=2,0725327,$$
$$\log.\ \sin\ 29^{\circ}.50=0,6967745-1,$$

$$\log.\ AC=2,3757582=\log.\ 237,56,$$

et de même $BC = \frac{AB.\sin.50^{\circ}.10'}{\sin.29^{\circ}.50'}$,

$$\begin{array}{rl} \log.\ AB & = 2{,}0791812, \\ \log.\ \sin.\ 50^{\circ}.\ 10' & = 0{,}8853109 - 1, \\ \hline \log.\ AB\sin.\ 50^{\circ}.\ 10' & = 1{,}9644921, \\ \log.\ \sin.\ 29^{\circ}.\ 50 & = 0{,}6967745 - 1, \\ \hline \log.\ BC & = 2{,}2677176 = \log.\ 185{,}25. \end{array}$$

PROBLÈME LXVII. Connaissant deux côtés et l'angle compris, calculer les angles et le côté inconnus?

Solution. (*Fig.* 80.) Dans le triangle ABC, l'on connaît $AB = 120^{m.}$,
$BC = 185{,}25$,
$B = 100^{\circ}$.

On veut trouver l'angle A?

De C imaginez la perpendiculaire CP sur AB; dans le triangle rectangle CPB on connaît l'hypothénuse CB, et l'angle $GPB = 80^{\circ}$. On pourra donc trouver, par le problème LXV, les côtés CP et PB. Effectuant les calculs, il vient $PC = 182{,}41$,
$BP = 32{,}17$,
$AP = 152{,}17$.

Or dans le triangle rectangle APC, on connaît les deux côtés de l'angle droit AP, PC. Ainsi, par le problème LXIV, on calculera l'angle A, qu'on trouve égal, comme cela doit être, à $50^{\circ}.\ 10'$. Connaissant l'angle A, on calcule AC comme il a été dit (Prob. LXVI).

PROBLÈME LXVIII. Connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver les deux autres angles?

Solution. Dans le triangle ABC, l'on a

$$AB = 120,$$
$$BC = 185,25,$$
$$C = 29^\circ.\,50',$$

or $\sin.\, A = \frac{BC \,.\, \sin.\, C}{AB} = \frac{185,25 \,.\, \sin. 29^\circ.\,50'}{120}.$

Faisant les calculs, on trouve

$$\log.\sin.\, A = 0,8853109 - 1\ ;$$

mais ce sinus répond à deux angles, à celui de 50°. 10′, et à son supplément 129°. 50′. Ainsi, il y a deux triangles BAC, BA′C, qui satisfont à la question et AB′ = BA ; mais il y a des cas faciles a trouver où il n'y a qu'une solution, et d'autres où le problème est impossible.

Problème LXIX. (*Fig.* 80.) Connaissant les trois côtés d'un triangle, trouver les angles ?

Solution. Soit $AB = 120 = c,$
$BC = 185,25 = a,$
$AC = 237,56 = b.$

L'angle A opposé au plus petit côté, est évidemment aigu ; abaissant la perpendiculaire BQ, on a (224)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \,.\, AQ,$$

ou $a^2 = c^2 + b^2 - 2b \,.\, AQ,$

et $AQ = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}.$

Or, $\cos.\, A = \frac{AQ}{AB} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}.$

On connaîtra donc l'angle A ; mais cette expression n'étant pas décomposable en facteurs, n'est pas commode par les calculs des logarithmes. Nous allons donner un autre moyen de trouver l'angle A ; nous avons, (333),

$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \sin.\ \text{vers.}\ A = 1 - \cos.\ A;$$

d'où $2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A = 1 - \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} =$

$$= \frac{2bc - c^2 - b^2 + a^2}{2bc};$$

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4bc} =$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}.$$

Faisons $a + b + c = 2p;$

on aura $a + b - c = 2p - 2c;$

$a + c - b = 2p - 2b;$

et $\sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \dfrac{(2p-2c)(2p-2b)}{4bc}.$

$$= \frac{(p-c)(p-b)}{bc};$$

et $\sin. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\dfrac{(p-c)(p-b)}{bc}}.$

Cette équation est énoncée dans la règle suivante :

Connaissant les trois côtés d'un triangle, pour trouver le sinus de la moitié d'un de ces angles, il faut de la demi-somme des trois côtés retrancher successivement les deux côtés de l'angle cherché; diviser le produit des deux restes par le produit de deux côtés, et extraire la racine carrée du quotient.

Dans l'exemple proposé, on a

$$a + b + c = 2p = 542,81$$

$$p = 271,405$$

$$p - c = 151,405$$

$$p - b = 33,845.$$

$\log. (p-c) = 2{,}1802659$ | $\log. b = 2{,}3757582$
$\log. (p-b) = 1{,}5294945$ | $\log. c = 2{,}0791812$
$3{,}7097604$ | $4{,}4549394$
$4{,}4549394$

$\log. \sin.^2 \frac{1}{2} A = 1{,}2548210 - 2$
$\log. \sin. \frac{1}{2} A = 0{,}6274105 - 1 = \log. 25^\circ 5'$;
d'où $A = 50^\circ 10'$.

On peut aussi se servir de la formule suivante, facile à calculer :

$$\tan \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Problème LXX. Connaissant deux côtés d'un triangle, et l'angle compris, calculer son aire ?

Solution. (*Fig.* 80) Soit $AB = 120 = c$;
$AC = 237{,}56 = b$;
$A = 50^\circ 10'$;

on a aire $ABC = \frac{1}{2} BQ . AC = \frac{1}{2} b . BQ$;

or $\frac{BQ}{AB} = \sin. A$;

donc $BQ = c \sin. A$;

et aire $ABC = \frac{1}{2} bc \sin. A$.

Ainsi *l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de deux de ses côtés, multipliée par le sinus de l'angle compris.*

Type du calcul,

$\log. b = 2{,}3757582$
$\log. c = 2{,}0791812$
$\log. \sin. A = 0{,}8853109 - 1$

$\log. bc \sin. A = 4{,}3402503$
$\log. 2 = 0{,}3010300$

$\log.$ aire $= 4{,}0392203 = \log. 10945$.
aire $= 10945^{mm}$ environ.

336. (*Fig.* 70.) L'aire d'un quadrilatère quelconque ABCD est égale à la moitié du produit de ses deux diagonales AC, BD, multiplié par le sinus de leur angle ; en effet, on a

aire du triangle $AIB = \frac{1}{2} AI \times IB \,.\, \sin.\ AIB$

$BIC = \frac{1}{2} BI \times IC \,.\, \sin.\ BIC$

$CID = \frac{1}{2} CI \times ID \,.\, \sin.\ CID$

$AID = \frac{1}{2} AI \times ID \,.\, \sin.\ AID$

Or ces quatre sinus sont égaux ; on a donc

$$\text{aire } ABCD = \tfrac{1}{2} \sin.\ AIB\,(AI \times IB + BI \times IC + CI \times ID + AI \times ID)$$
$$= \tfrac{1}{2} \sin.\ AIB\,(BI + ID)\,(AI \times IC)$$
$$= \tfrac{1}{2} \sin.\ AIB \,.\, BD \,.\, AC. \text{ c. q. f. d.}$$

De là on conclut : 1° lorsque les diagonales se coupent sous un angle de trente degrés, l'aire du quadrilatère est égale au quart du produit des diagonales (326) ; 2° lorsqu'elles se coupent à angles droits, l'aire est égale à la moitié du produit des deux diagonales.

PROBLÈME LXXI. Étant donnés les trois côtés d'un triangle, trouver son aire ?

Solution. (*Fig.* 80.) Soient

$AB = 120^{m} \quad = c$

$BC = 185^{m},25 = a$

$AC = 237^{m},56 = b$

R = aire cherchée ;

$R = \frac{1}{2} bc \sin.\ A$ (PR. LXX) ;

$$\sin.^{2} \tfrac{1}{2} A = \frac{2bc - c^{2} - b^{2} + a^{2}}{4bc} \text{ (PR. LXIX ;}$$

$$\cos.^{2} \tfrac{1}{2} A = 1 - \sin.^{2} \tfrac{1}{2} A = 1 - \frac{2bc - c^{2} - b^{2} + a^{2}}{4bc} = \frac{2bc + c^{2} + b^{2} - a^{2}}{4bc} =$$

$$= \frac{(b+c)^{2} - a^{2}}{4bc} = \frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{4bc} ;$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b}{16\,b^2\,c^2}.$$

Faisons $a+b+c=2p$,
il vient $b+c-a=2p-2a$
$a+b-c=2p-2c$
$a+c-b=2p-2b$;

$$\cos.^2\tfrac{1}{2}\mathrm{A}\sin.^2\tfrac{1}{2}\mathrm{A}=$$

$$=\frac{2p(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)}{16\,b^2\,c^2}=$$

$$=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2\,c^2};$$

d'où

$$\cos.\tfrac{1}{2}\mathrm{A}\sin.\tfrac{1}{2}\mathrm{A}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c}}{bc}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\sin.\mathrm{A}\ (325);$$

donc

$$\mathrm{R}=\tfrac{1}{2}bc\sin.\mathrm{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

De là cette règle : *de la demi-somme des côtés, retranchez successivement chacun des côtés, multipliez les trois restes ensemble, et le produit par la demi-somme; extrayez la racine carrée du produit, et vous aurez l'aire du triangle.*

Dans l'exemple proposé, on a

$$p = 271,405$$
$$p - a = 86,155$$
$$p - b = 33,845$$
$$p - c = 151,405$$
$$\log. p = 2,4336098$$
$$\log. p - a = 1,9352805$$
$$\log. p - b = 1,5294945$$
$$\log. p - c = 2,1802659$$

$$\log. R^2 = 8,0786507$$
$$\log. R = 4,0393253 = \log. 10948$$
$$R = 10948^{mm}.$$

Si $c = a$, le triangle est isocèle, et l'on a

$$R = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}.$$

Si $a = b = c$, le triangle est équilatéral, et l'on obtient

$$R = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

Si $a^2 = b^2 + c^2$, le triangle est rectangle, et l'on a $R = \frac{1}{2} bc$.

De la division du cercle en parties égales ; des polygones réguliers inscrits et circonscrits ; aire du cercle ; rapport de la circonférence au diamètre.

337. PROBL. LXXI *bis.* (*Fig.* 81.) Diviser la circonférence CBAD en quatre arcs égaux ?

Solution. Menez deux diamètres AOC, BOD perpendiculaires ; ils divisent la circonférence et le cercle en quatre parties égales (139).

338. En joignant les points de division par

des cordes, on aura la figure ABCD qui est un carré ; car les côtés, étant des cordes sous-tendant des arcs égaux, sont égaux, et les angles étant inscrits, et s'appuyant sur des diamètres, sont droits (155) ; le carré est *inscrit* dans la circonférence. En désignant le rayon par R, on a évidemment :

$$AB^2 = 2R^2 ; AB = R\sqrt{2}.$$

Ainsi, *l'aire du carré inscrit est égale à deux fois le carré fait sur le rayon*, et l'aire du cercle est donc plus grande que deux fois le carré du rayon.

339. Par les quatre points de division, menons des tangentes ; elles formeront par leurs intersections un carré LMNP, qui est circonscrit au cercle ; $LM = AC = 2R$,

$$LM^2 = 4R^2.$$

Ainsi, *l'aire du carré circonscrit est égale à quatre fois le carré du rayon ;* or l'aire du cercle est moindre que celle du carré circonscrit : donc l'aire du cercle est comprise entre deux fois et quatre fois le carré du rayon, et celle du cercle, qui a un mètre pour rayon, est comprise entre deux et quatre mètres carrés.

340. Problème LXXII. Diviser la circonférence en huit parties égales ?

Solution. Divisez les quatre cadrans chacun en deux parties égales.

Joignant les points de division par des droites, on aura la figure AHBGCFDEA, qui est un octogone dont les côtés sont égaux, comme cordes sous-tendant des arcs égaux, et dont les angles sont aussi égaux, comme inscrits dans la circonférence, dans des segmens égaux. Cet octogone est un polygone

inscrit dans la circonférence ; de plus il est *régulier.* On donne ce nom *à un polygone qui a ses côtés égaux et ses angles égaux, qui est à la fois équilatéral et équiangle.*

Le rayon OH est perpendiculaire sur AB : donc l'aire du quadrilatère AOBH est égale à $\frac{1}{2}$ OH . AB. Par conséquent l'aire de l'octogone inscrit est égale à quatre fois $\frac{1}{2}$ OH. AB, ou bien

$$2.\ \text{OH}.\ \text{AB} = 2\ \text{R}^2 \sqrt{2}.$$

Mettant pour $\sqrt{2}$, sa valeur approchée, on aura

$$2\text{R}^2 \sqrt{2} = 2,8284272\ \text{R}^2\,;$$

donc, lorsque $\text{R} = 1$, l'aire du cercle est renfermée entre 4 et 2,8284272.

341. Si par les huit points de division on mène des tangentes à la circonférence, on obtient un octogone régulier *circonscrit* à la circonférence ; car tous les angles étant formés par deux tangentes, et interceptant les mêmes arcs concaves et convexes, sont égaux (158) ; donc aussi les tangentes sont égales ; les triangles BHS, BGT, sont égaux comme ayant un côté égal et les angles égaux ; donc, etc. ; l'aire de l'octogone circonscrit est égale à seize fois l'aire du triangle OAR, ou bien 8 OA. AR. Faisant $\text{OA} = 1$, on a

$$\text{AR} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{AOH} = \text{tang.}22^\circ.30' = \frac{\sin.22^\circ.30'}{\cos.22^\circ.30'}.$$

A l'aide de la formule A, (325), on trouve

$$\text{tang.}\ 22^\circ\ 30' = 0,4142136\ ;$$

donc l'aire de l'octogone est égale à 3,3137088 ; et l'aire du cercle est comprise entre ce nombre et 2,8284272.

342. L'angle AOH formé par deux rayons

qui aboutissent à un même côté se nomme *angle au centre.*

343. En généralisant les raisonnemens qui précèdent, on conclut : 1° lorsque la circonférence est divisée en n parties égales, et joignant les points de division par des cordes, elles forment un polygone *régulier inscrit* de n côtés. 2° L'aire de ce polygone régulier est égale a n fois l'aire du triangle AOH, qui est égale à $\frac{1}{2}$ R^2 sin. AOH : donc l'aire d'un polygone régulier inscrit est égale au carré du rayon pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le sinus de l'angle au centre multiplié par la moitié du nombre de côtés. 3° Les aires des deux polygones réguliers inscrits dans la même circonférence sont entre elles comme les sinus des angles aux centres multipliés par le nombre des côtés. 4° En menant des tangentes par les n points de division, on forme un polygone régulier de n côtés circonscrit au cercle. 5° L'aire de ce polygone régulier est égale à n fois l'aire du quadrilatère AOFR, qui est égale à AO^2. tang. $\frac{1}{2}$ AOH : donc l'aire du polygone circonscrit est égale au carré du rayon pris autant de fois qu'il y a d'unités dans n fois la tangente de la moitié de l'angle au centre.

344. Soient donc

C, l'angle au centre,

A, l'aire du polygone inscrit d'un nombre n de côtés,

B, l'aire du polygone circonscrit d'un nombre n de côtés,

on aura $A = \frac{n}{2} R^2 \sin. C$,

$B = n R^2 \text{tang.} \frac{1}{2} C$; d'où

$$\frac{B}{A} = \frac{2 \text{ tang.} \frac{1}{2} C}{\sin. C} = \frac{2 \text{ tang.} \frac{1}{2} C}{2 \sin. \frac{1}{2} \cos. \frac{1}{2} C} =$$

$$= \frac{\text{tang.} \frac{1}{2} C}{\sin. \frac{1}{2} C \cos. \frac{1}{2} C} = \frac{\frac{\sin. \frac{1}{2} C}{\cos. \frac{1}{2} C}}{\sin. \frac{1}{2} C \cos. \frac{1}{2} C} = \frac{1}{\cos.^2 \frac{1}{2} C};$$

d'où $A = B \cos.^2 \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} B (1 + \cos. C)$,

$$B = \frac{2A}{1 + \cos. C} = \frac{A}{\cos.^2 \frac{1}{2} C},$$

et $\frac{A}{B} = \cos.^2 \frac{1}{2} C$; $1 - \frac{A}{B} = \sin.^2 \frac{1}{2} C$.

Or, plus le nombre des côtés augmente, plus l'angle C diminue, et plus son cosinus augmente et s'approche d'être égal à l'unité. Par conséquent le quotient $\frac{A}{B}$ diminue et s'approche de l'unité : et sa différence d'avec l'unité peut devenir plus petite qu'aucune quantité assignable.

Par exemple : Faisant

$n = 256$; alors $C = 1° 24^{\circ}.22''.30'''$,

$\sin. \frac{1}{2} C = 0{,}0000373$.

345. Soit

A′, l'aire du polygone régulier inscrit de $2n$ côtés,

B′, l'aire du polygone régulier circonscrit de $2n$ côtés,

on aura $A' = n R^2 \sin. \frac{1}{2} C$,

$B' = 2 n R^2 \text{ tang.} \frac{1}{4} C$.

Or, $$AB = \frac{n^2}{2} R^4 \sin. C \tang. \tfrac{1}{2} C =$$

$$= \frac{n^2}{2} 2 \sin. \tfrac{1}{2} C \cos. \tfrac{1}{2} C \frac{\sin. \tfrac{1}{2} C}{\cos. \tfrac{1}{2} C} R^4$$

$$= n^2 R^4 \sin.^2 \tfrac{1}{2} C = A'^2;$$

d'où $$A' = \sqrt{AB} \ (1).$$

Ainsi, l'aire du polygone circonscrit d'un nombre de côtés $2n$ est une moyenne proportionnelle géométrique entre les aires des polygones inscrit et circonscrit d'un nombre n de côtés.

On a $$A = \frac{n}{2} R^2 \sin. C = n R^2 \sin. \tfrac{1}{2} C \cos. \tfrac{1}{2} C =$$

$$= A' \cos. \tfrac{2}{2} C;$$

d'où $$A' = \frac{A}{\cos \tfrac{1}{2} C.} = A \text{ séc. } \tfrac{1}{2} C.$$

Par cette formule, on calcule A' au moyen de A.

On obtient, en ajoutant

$$A' + A = A' (1 + \cos. \tfrac{1}{2} C) = 2 A' \cos.^2 \tfrac{1}{4} C,$$

$$A' + A = 2 n R^2 \sin. \tfrac{1}{2} C \cos.^2 \tfrac{1}{4} C.$$

$$2 AB = 2 n^2 R^4 \sin. \tfrac{2}{1} C;$$

de là

$$\frac{2AB}{A+A} = \frac{nR^2 \sin. \tfrac{1}{2} C}{\cos.^2 \tfrac{1}{2} C} = \frac{2n R^2 \sin. \tfrac{1}{4} C \cos. \tfrac{1}{4} C}{\cos.^2 \tfrac{1}{4} C} =$$

$$\frac{2n R^2 \sin. \tfrac{1}{4} C}{\cos. \tfrac{1}{4} C} = 2n R^2 \tang. \tfrac{1}{4} C = B' \ (2).$$

Connaissant donc A et B, on en déduira les valeurs de A' et ensuite celle de B'.

Rassemblant ces diverses valeurs, on trouve

$$A = \tfrac{1}{2} nR^2 \sin. C \ (1).$$

$$A = B \cos.^2 \tfrac{1}{2} C \ (2), = \frac{B}{2}(1+\cos. C)$$

$$A = A' \cos. \tfrac{1}{2} C \ (3),$$

$$B = \tfrac{1}{2} B' \frac{(1+\cos. \tfrac{1}{2} C)}{\cos. \tfrac{1}{2} C} \ (4);$$

ou $nC = 360°$,

et $\dfrac{B'}{B} = \dfrac{1+\cos. \tfrac{1}{2} C}{2\cos. \tfrac{1}{2} C}.$

l'on a $B' - A' = \dfrac{A'(A'-A)}{A'+A} = \dfrac{AA'(B-A)}{(A'+A)^2}$

or, $\dfrac{AA'}{(A'+A)^2} < \tfrac{1}{2}.$

donc la différence $B'-A'$ peut devenir plus petite qu'aucune quantité donnée. (Note 10.)

346. Un polygone régulier étant donné, on peut toujours faire passer une circonférence par tous ses sommets. Soit AHBGCDEA le polygone régulier donné; menons la diagonale AG, on formera un trapèze AHBG, inscriptible dans une circonférence; car les angles opposés AHB, BGA, sont supplémentaires. Donc la circonférence qui passe par les trois sommets A, F, B, passera aussi par le quatrième sommet G; on démontrera de même qu'elle devra passer par le point C: donc elle passera par tous les points.

On nomme *centre du polygone régulier*, le point O qui est le centre de la circonférence circonscrite.

347. On peut aussi toujours inscrire une circonférence à un polygone régulier. En effet, après avoir fait passer une circonférence par

tous les sommets, les côtés des polygones deviennent des cordes égales, et par conséquent également éloignées du centre ; donc, si de ce point comme centre, et d'un rayon OK égal à la distance d'une de ces cordes on décrit une circonférence, elle sera tangente à toutes les cordes, et sera inscrite au polygone ; on nomme cette distance *rayon du cercle inscrit;* quelquefois on la nomme aussi l'*apothème* du polygone.

348. L'aire d'un polygone régulier est égale à son périmètre multiplié par la moitié de l'apothème.

Soit toujours AH le côté d'un polygone régulier de n côtés, et C l'angle au centre AOH, on aura $OK = R \cos. \frac{1}{2} C$. Ainsi, le rayon du cercle inscrit est égal au rayon du cercle circonscrit multiplié par le cosinus de la moitié de l'angle au centre.

349. Soient

P, le périmètre du polygone inscrit de n côtés,

Q, le périmètre du polygone circonscrit de n côtés,

P', le périmètre du polygone inscrit de $2n$ côtés,

Q', le périmètre du polygone circonscrit de $2n$ côtés,

on aura
$$A = \tfrac{1}{2} PR \cos. \tfrac{1}{2} C,$$
$$B = \tfrac{1}{2} QR,$$
$$A' = \tfrac{1}{2} P' R \cos. \tfrac{1}{4} C,$$
$$B' = \tfrac{1}{2} Q' R,$$
et
$$\frac{A}{B} = \frac{P \cos. \frac{1}{2} C}{Q}.$$

Or, à mesure que le nombre des côtés augmente, le rapport $\frac{A}{B}$ diminue et s'approche sans

cesse de l'unité ; il en est donc de même du rapport $\frac{P \cos. \frac{1}{2} C}{Q}$.

350. En multipliant A par B', il vient

$$AB' = \frac{1}{4} PQ' R^2 \cos. \frac{1}{2} C$$

$$A'^2 = \frac{1}{4} P'^2 R^2 \cos.^2 \frac{1}{4} C = \frac{1}{8} P'^2 R^2 (1 + \cos. \frac{1}{2} C)$$

d'ou $\frac{A'^2}{AB'} = \frac{AB}{AB'} = \frac{P'^2 (1 + \cos. \frac{1}{2} C)}{PQ' \, 2 \cos. \frac{1}{2} C} = \frac{B}{B'}$

or $\frac{B}{B'} = \frac{1 + \cos. \frac{1}{2} C}{2 \cos. \frac{1}{2} C}$ (p. 201) ;

donc $P'^2 = PQ'$, ainsi P' est une moyenne proportionnelle entre P et Q'.

Les expressions suivantes sont aisées à calculer :

$P = 2 \, n \, R \sin. \frac{1}{2} C$ (5)
$P = P' \cos. \frac{1}{4} C$ (6)
$P = Q \cos \frac{1}{2} C$ (7) ; et $Q = 2 \, n \, R \, \text{tang} \, \frac{1}{2} C$
$P = Q' (\cos, \frac{1}{4} C)^2$ (8) ;=
$= \frac{1}{2} Q' (1 + \cos \frac{1}{2} C)$ ou $n \, C = 360°$.

$$Q' = \frac{2PQ}{P+Q}.$$

Les quatre formules, p. 201, jointes à celles-ci, servent à résoudre toutes les questions sur les polygones réguliers.

351. Problème LXXIII. Diviser la circonférence en six parties égales ?

Solution. (*Fig.* 82.) Portez le rayon AO de A en B, le triangle A O B étant équilatéral, l'angle en O est de 60° ; par conséquent, l'arc AB est le $\frac{1}{6}$ de la circonférence, sur laquelle on peut le porter six fois.

La formule (5) donne P=6 ; lorsque R=1
A=2,5980762

352. En divisant successivement l'arc AB en 2, en 4, en 8 parties égales, on inscrira des polygones de 12, 24, 48, etc., côtés.

353. Problème LXXIV. Diviser une circonférence en 10 parties égales?

Solution. (*Fig.* 83.) Soit AB la dixième partie de la circonférence, ou un arc de 36°, le triangle AOB étant isocèle, les angles ABO et AOB seront chacun de 72°, et par conséquent le double de l'angle au centre AOB : donc la droite BC, qui divise l'angle ABO en deux parties égales, partage le triangle ABO en deux trianges isocèles ABC, BCO. En effet, on a

$$CBO = 36^\circ$$
$$COB = 36^\circ;$$

donc
$$BC = CO$$
$$CBA = 36^\circ$$
$$BAC = 72^\circ;$$

donc
$$BCA = 36^\circ;$$

et
$$AB = BC;$$

donc aussi
$$AB = CO.$$

Les triangles ABC, AOC, semblables parce qu'ils sont équiangles, donnent les proportions

$$AO : AB :: AB : AC;$$

ou bien

$$AO : CO :: CO : AC.$$

Donc le rayon AO est coupé en moyenne et extrême raison au point C ; le grand segment CO est égal au côté AB du décagone inscrit.

354. En joignant deux à deux les points de division du décagone on obtient le pentagone inscrit ACE : on peut aussi diviser la circonférence en 20, 40, 80, etc., parties égales.

355. Si on retranche l'arc de 15° de l'arc 18°, on a un arc de 3° qui est contenu 120 fois dans

la circonférence ; on peut donc inscrire un polygone de 15, 30, 60, 120, 240, etc., côtés.

356. On peut inscrire en général dans le cercle des polygones d'un nombre 2^n+1 de côtés, lorsque ce nombre est premier.

Mais il serait trop long d'indiquer ici les opérations à exécuter.

Le plus petit nombre de ce genre, après 5, est 17. (Note 12.)

357. PROBLÈME LXXV. Étant donné le côté d'un polygone régulier désigné, construire le polygone ?

Solution. Décrivez une circonférence d'un rayon quelconque ; inscrivez un polygone régulier du nombre de côtés désigné, et faites, sur le côté donné, un polygone semblable.

Aire du cercle et rapport du diamètre à la circonférence.

358. Soit L la longueur de la circonférence exprimée en unités linéaires, soit en mètres.

M la surface du cercle exprimée en unités superficielles, soit en mètres carrés.

L sera toujours plus petit que le périmètre Q du polygone circonscrit qui enveloppe la circonférence, et plus grand que le périmètre P du polygone inscrit (106) ; donc $\frac{1}{2}$ RL sera aussi compris entre $\frac{1}{2}$ QR et $\frac{1}{2}$ PR ; c'est-à-dire qu'on a $\frac{1}{2} RL > \frac{1}{2} PR$

$$\frac{1}{2} RL < \frac{1}{2} QR ;$$

donc, à plus forte raison,

$$\frac{1}{2} RL > \frac{1}{2} PR \cos. \frac{1}{2} C \text{ (p. 201)},$$

car cos. $\frac{1}{2}$ C est une quantité au-dessous de l'unité ; mais $\frac{1}{2} QR = B$ et $\frac{1}{2} PR \cos \frac{1}{2} C = A$ (345), $\frac{1}{2}$ RL est donc renfermée entre les deux limites A et B ; mais M est évidemment com-

pris entre les mêmes termes ; et comme la différence de ces termes peut devenir plus petite qu'aucune quantité assignable, il s'ensuit qu'on doit avoir (143):

$$M = \frac{1}{2} RL;$$

donc *l'aire du cercle est égale à la circonférence multipliée par la moitié du rayon.*

On parvient à ce même résultat en considérant la circonférence comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits; cette considération est un moyen commode de se rappeler promptement le résultat.

359. On démontre de la même manière que l'aire d'un secteur est égale à l'arc multiplié par la moitié du rayon.

L'aire du segment est égale à l'aire du secteur, moins l'aire du triangle, formé par la corde et les deux rayons qui passent par les extrémités.

360. Les circonférences étant proportionnelles aux diamètres et les cercles aux carrés des diamètres (306), il s'ensuit que, quel que soit ce diamètre, en le désignant par D, les rapports $\frac{M}{D^2}$, $\frac{L}{D}$ sont des quantités constantes; on est convenu de représenter le rapport constant $\frac{L}{D}$ par la lettre grecque π; de sorte qu'on a

$$\pi = \frac{L}{D};$$

or

$$\frac{M}{R^2} = \frac{L}{2R} = \frac{L}{D} = \pi$$

et

$$\frac{M}{D^2} = \frac{1}{4}\pi$$

Le célèbre Lambert a démontré par des raisonnemens trop longs à exposer, que le rapport π et même π^2, est incommensurable; mais il est aisé d'en obtenir une valeur approchée.

En effet, L est toujours compris entre P et Q; donc $\frac{L}{D}$ sera toujours renfermé entre $\frac{P}{D}$ et $\frac{Q}{D}$: supposons qu'on ait calculé deux polygones dont les périmètres ne diffèrent plus que d'une décimale du septième ordre, il est évident qu'en s'arrêtant à cette décimale, on aura la valeur de π, à moins d'une unité de cet ordre près : supposons qu'on inscrive et qu'on circonscrive un polygone de 240 côtés, on aura 240 C = 360, d'où C = 1° 30'; sin. $\frac{1}{2}$ C =0,0130896.

$$P = 480 \text{ R. sin. } 45' = 6{,}2830080 \text{ R}$$

$$\text{et } \frac{P}{D} = \frac{P}{2R} = 3{,}145040$$

$$Q = 480 \text{ R. tang. } 45' = 6{,}283536$$

$$\frac{Q}{D} = 3{,}141768;$$

or $\frac{P}{D}$ et $\frac{Q}{D}$ s'accordent jusqu'aux millièmes; on a donc $\pi = 3{,}141$ à un millième près.

Archimède, célèbre géomètre sicilien, qui vivait trois siècles avant Jésus-Christ, a trouvé, en inscrivant un polygone de 96 côtés, que π était compris entre $3\frac{10}{71}$ et $3\frac{10}{70}$ ou $3\frac{1}{7}$.

Ce dernier rapport est trop fort : si on en soustrait $\frac{1}{4970}$, il devient trop faible. Sur un diamètre de mille mètres, la circonférence

calculée d'après ce rapport, est trop longue de plus de 1 mètre. Comme ce rapport est très-simple, il est le plus connu et le plus usité, quand on n'a pas besoin d'une extrême exactitude.

Adrien Métius le père, géomètre hollandais du dix-septième siècle, a trouvé

$$\pi = \frac{355}{113} = 3,1415929.$$

Ce rapport est trop fort; il est d'une grande exactitude; pour un diamètre d'un million de mètres, de près de 250 lieues de longueur, la circonférence est trop longue de 1 mètre. En écrivant à côté l'un de l'autre le dénominateur et le numérateur on obtient, 1.1.3. 3.5.5. On voit que les trois premiers nombres impairs sont chacun répétés deux fois. Cette observation suffit pour se rappeler facilement le rapport de Métius.

Ludolph Van-Keulen, géomètre hollandais, a poussé l'approximation jusqu'à la 35e décimale, et Lagny jusqu'à la 128e; mais Véga, major d'artillerie autrichienne, y a découvert une faute typographique. La 113e décimale doit être un 8 et non un 7; et il a poussé l'approximation jusqu'à la 140e décimale

$\pi = 3,14159265358979$3, etc. (Voir Table V.)

361. M. Pioche, statuaire de la ville de Metz, a fait l'ingénieuse observation qu'on avait à très-peu près

$$\pi = \tfrac{1}{2}\left(3 + \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{5} + \tfrac{2}{3}\sqrt{1+9}\right) = 3,1415925,$$

expression qui n'est en erreur qu'à la 7e décimale; elle présente l'avantage de fournir

une construction facile pour faire, à très-peu près, une ligne de même longueur qu'une circonférence donnée : le rapport 3,1416 est suffisant pour la pratique.

362. On a $\frac{L}{D}=\pi$ (343)

d'où $$L=\pi D=2\pi R$$

Ainsi *la longueur d'une circonférence est égale au diamètre multiplié par* π.

On a ensuite

$$M=\tfrac{1}{2}RL=\tfrac{1}{2}R.2\pi R=\pi R^2=\frac{\pi D^2}{4};$$

donc *l'aire du cercle est égale au carré du rayon multiplié par* π, *ou bien encore est égale au carré du diamètre multiplié par le quart de* π.

Problèmes sur les circonférences et les cercles.

363. Problème LXXVI. Étant donnée la longueur du rayon, calculer celle de la circonférence?

Solution. $R=287^m$;

on aura $L=2\pi.287=574\pi$;

log. 574 = 2,7589119
log. π = 0,4971498 (Voir Table 7.)

log. L = 3,2560617 = log. 1804,3 environ.

En se servant du rapport d'Archimède, on trouve

$$L=\frac{44}{7}.287=44.41=1804.$$

Problème LXXVII. Étant donnée la circonférence, calculer le rayon?

Solution. Soit $L = 1804,3$;

on a $$R = \frac{L}{2\pi};$$

$$\log. L = 3,2560617$$
$$\log. 2\pi = 0,7981798$$
$$\log. R = 2,4578819 = \log. 287.$$

PROBLÈME LXXVIII. Connaissant le rayon, calculer l'aire du cercle ?

Solution. Soit $R = 287$;

on aura $$M = \pi R^2;$$

$$\log. R^2 = 2 \log. R = 4,9157638$$
$$\log. \pi = 0,4971498$$
$$\log. M = 5,4129136 = \log. 258870$$
$$M = 258870.$$

En faisant le produit de R par $\frac{1}{2}$ L, on trouve
$$M = 258874.$$

L'aire M dépend de π; or il est démontré qu'on ne peut trouver ce rapport exactement; donc aussi M est incommensurable à l'égard du rayon : il est donc impossible de trouver un carré exactement équivalent au cercle; c'est ce qu'on nomme la *quadrature du cercle*, recherche qui depuis la démonstration de Lambert (p. 207) ne peut plus occuper un géomètre.

PROBLÈME LXXIX. Connaissant l'aire du cercle, calculer le rayon ?

Solution. $$R = \sqrt{\frac{M}{\pi}};$$

soit $$M = 258874^{mm};$$

on aura $$R = \sqrt{\frac{258874}{\pi}} = 287.$$

Problème LXXX. Connaissant le rayon, calculer la longueur d'un arc?

Solution. Soit a l'arc donné, exprimé en degrés et parties de degrés, l sa longueur, R le rayon; on fera la proportion

$$360 : a :: 2\pi R : l = \frac{a \cdot 2\pi R}{360^\circ} = \frac{a}{180^\circ}\pi R.$$

Soit $a = 75^\circ$, et $R = 287^m$;

$$\text{on a } l = \frac{75^\circ}{180^\circ} 287\pi = \frac{15}{36} \cdot 287 \cdot \frac{22}{7} =$$

$$= \frac{5}{12} \cdot 41 \cdot 22 = \frac{5 \cdot 41 \cdot 11}{6}.$$

on a $$l = 375^m \frac{5}{6}.$$

Problème LXXXI. Connaissant la longueur d'un arc et le nombre de ses degrés, calculer le rayon?

Solution. $$R = \frac{180^\circ}{a} \frac{l}{\pi}.$$

Problème LXXXII. Connaissant le rayon et l'arc, trouver l'aire du secteur?

Solution. Soit a l'arc; on calcule sa longueur l (Pr. LXXX), et l'aire cherchée sera égale à $\frac{1}{2} R l = \frac{a}{360^\circ}\pi R^2$.

Problème LXXXIII. Étant donnés le rayon et l'arc, trouver l'aire du segment?

Solution. L'aire du segment est égale à

$$\frac{360^\circ}{a}\pi R^2 - \frac{1}{2} R^2 \sin. a.$$

Problème LXXXIV. Construire une circonférence égale à la somme ou à la différence de deux circonférences données?

Solution. Soit R et R′ les rayons donnés, et r le rayon de la circonférence cherchée, on aura donc $2\pi r = 2\pi R + 2\pi R'$, lorsqu'il s'agit de la somme; et $2\pi r = 2\pi R - 2\pi R'$, lorsqu'il s'agit de la différence;

on en tire $$r = R + R'$$
$$r = R - R'.$$

Il suffit donc de décrire une circonférence d'un rayon égal à la somme de deux rayons ou à leur différence.

Problème LXXXV. Construire un cercle égal à la somme des deux cercles?

Solution. (*Fig.* 84.) En raisonnant comme ci-dessus, on aura

$$\pi r^2 = \pi R^2 + \pi R'^2;$$

d'où $$r^2 = R^2 + R'^2;$$

construisant le triangle rectangle en A, dont le côté AB est égal à R, et le côté AC égal à R′, l'hypothénuse sera le rayon du cercle demandé.

364. (*Fig.* 84.) Si sur les trois côtés du triangle rectangle ABC, on décrit des circonférences, le demi-cercle construit sur l'hypothénuse, passant nécessairement par le sommet R, sera équivalent à la somme des demi-cercles faits sur les côtés de l'angle droit; retranchant de part et d'autre les segmens communs AHB, AKB, il restera le triangle ABC équivalent à la somme des aires des deux lunules AHBL, AMCK; lorsque les côtés AB et AC sont égaux, l'aire du triangle est double de l'aire d'une lunule; cette proposition est connue sous le nom de *lunule d'Hippocrate*, géomètre grec qui vivait vers le 5e siècle avant Jésus-Christ. On a ici l'exemple d'une surface curviligne exactement carrable; on peut en imaginer une infinité

d'autres. (*Fig.* 85.) En effet, si sur les côtés égaux AB, AC, du triangle isocèle ABC, on décrit des segmens égaux ALB, AMC, l'aire du triangle mixtiligne ALBCMA sera équivalente à l'aire du triangle rectiligne BAC, et en faisant la même figure en dessous de BC, on aura une surface curviligne sous forme de hache, équivalent à un parallélogramme (note 13); ces sortes d'exemples induisent en erreur les personnes qui s'obstinent à la recherche de la quadrature du cercle; elles ne font pas attention que, dans les cas cités, la quantité π disparaît par suite d'une soustraction; mais toutes les fois qu'elle reste dans le calcul, les résultats deviennent approximatifs, et ne sont plus susceptibles d'une exactitude rigoureuse.

365. Problème LXXXVI. Etant donnés deux polygones semblables, construire un troisième polygone semblable, dont le périmètre soit égal à la somme des périmètres des polygones donnés?

Solution. Soient m, m', deux côtés homologues des polygones donnés; P et P' leurs périmètres, x le côté homologue du polygone cherché, et X son périmètre, on fera $x = m + m'$, et on construit sur x un polygone semblable à un des polygones donnés; car on a

$$P : P' :: m : m';$$

d'où $P + P' : P :: m + m' : m :: x : m$;

or on a aussi $X : P :: x : m$;

donc $X = P + P'$.

Probl. LXXXVII. Mêmes données que dans le problème précédent; construire un polygone semblable, ayant une aire équivalente à la somme des aires des polygones donnés?

Solution. $x^2 = m^2 + m'^2$, même moyen de

démonstration. On voit ce qu'il faut faire quand il s'agit de la différence.

Problème LXXXVIII. Etant donné un polygone, construire un polygone semblable, de manière que leurs périmètres ou leurs aires soient dans un rapport donné?

Solution. Soient m un côté du polygone donné, x le côté homologue du polygone cherché, et $\frac{p}{q}$ le rapport donné entre les périmètres; faites la proportion $p : q :: m : x$ pour les périmètres.

Si $\frac{p}{q}$ est un rapport entre les aires, faites la proportion $p : q :: m^2 : x^2$, et on trouvera x d'après le problème (263).

Problème LXXXIX. Etant donné un cercle, en trouver un autre tel que les circonférences ou bien que les aires soient dans un rapport donné?

Solution. La même que dessus, en prenant les rayons pour côtés homologues.

Problème XC. Construire un polygone semblable à un polygone donné et équivalent à une aire donnée?

Solution. Soit
N le côté du carré équivalent à l'aire donnée;
P le côté du carré équivalent au polygone donné, m un côté quelconque de ce polygone, x le côté homologue du polygone cherché;
on a $P^2 : N^2 :: m^2 : x^2$;
ou bien $P : N :: m : x$,
et le côté x sera connu.

366. Nous allons énoncer ici quelques pro-

priétés remarquables des polygones, que les bornes de cet ouvrage ne nous permettent pas de démontrer; on les trouve la plupart dans l'excellent Journal, jadis publié par M. Gergonnes, sous ce titre : *Annales de Mathématiques* et qui est malheureusement interrompu.

367. 1° R étant le rayon du cercle circonscrit à un triangle,
r étant le rayon du cercle inscrit à un triangle,
D la distance des deux centres,
l'on aura $D^2 = R^2 - 2rR$.

2° r, Etant le rayon du cercle inscrit intérieurement à un triangle; r', r'', r''', les rayons des trois cercles inscrits extérieurement; R le rayon du cercle circonscrit A, l'aire du triangle, l'on a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}$$
$$R = \tfrac{1}{4}(r' + r'' + r''' - r)$$
$$A = \sqrt{rr'r''r'''}.$$

3° Dans tout triangle, les trois hauteurs se coupent au même point; les trois droites qui vont des sommets aux milieux des côtés passent par le même point; ces deux points et le centre du cercle circonscrit sont toujours sur une même droite.

4° Si, d'un point pris sur la circonférence circonscrite à un triangle, on mène trois droites, faisant respectivement le même angle avec chaque côté du triangle, les pieds de ces droites sont sur une même droite.

5° Un hexagone étant inscrit au cercle et allant dans le même sens, si l'on désigne les côtés par les six premiers nombres, les inter-

sections des côtés 1, 4 ; 2, 5 ; 3, 6 ; sont sur une même droite. Cette belle propriété est due à Pascal, qui lui a donné le nom *peu géométrique* de hexagramme *mystique*.

6° Un hexagone étant circonscrit à un cercle, et désignant les angles en allant dans le même sens, par les six premiers nombres ; les diagonales 1, 4 ; 2, 5 ; 3, 6 ; se coupent en un même point.

Cette propriété est due à M. Brianchon, ancien capitaine d'artillerie, et ancien professeur à l'école d'artillerie de Vincennes.

Ces propriétés ont également lieu pour les courbes dites *sections coniques*. La démonstration la plus facile et la plus élégante a été donnée par M. Durrande. (Gergonnes, tome XIV, page 29.)

(*Fig.* 85 *bis.*) Elle consiste en ceci : soient *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *a*, ABCDEFA, deux hexagones, inscrits et circonscrits au même cercle : désignons par

P, Q, R, les intersections des côtés AF, CD ; AB, DE ; BC, EF ;

p, *q*, *r*, les intersections des côtés *af*, *ed* ; *ab*, *de* ; *bc*, *ef*.

Désignons encore par cercle P, celui qui a pour centre P, et pour rayon P*b* = P*e* ;

Cercle Q, celui qui a pour centre Q, et pour rayon Q*c* = Q*f* ;

Cercle R, celui qui a pour centre R, et pour rayon R*d* = R*a* ;

Cercle A, celui qui a pour centre A et pour rayon A*c* = A*b* ;

Cercle B, celui qui a pour centre B, et pour rayon B*d* = B*c* ;

Cercle C, celui qui a pour centre C, et pour rayon C*e* = C*d* ;

Cercle D, celui qui a pour centre D, et pour rayon $Df = De$ et ainsi de suite.

Le cercle A touche intérieurement le cercle R en b, et extérieurement le cercle Q en c; donc Bc passe par le centre de similitude des cercles P et Q; le cercle D touche extérieurement le cercle P en c, et intérieurement le cercle Q en f; donc fe passe aussi par le centre intérieur de similitude des cercles P et Q. Par conséquent, r intersection de bc et de ef, est le centre de similitude des cercles P et Q. On démontre de même que q est le centre de similitude intérieure des cercles P et R; et p le centre de similitude extérieure de Q et R: donc les trois points p, q, r, sont sur une même droite (310); or bc, ef, étant les polaires de A et de D, leur intersection r est le pôle de AD (245); par la même raison, p est le pôles de BE, et q celui de CF; or, p, q, r, sont en ligne droite: donc les diagonales AD, BE, CF, passent le même point O. c. q. f. d.

Dans la *figure* 85 (a), les points e, f s'étant rapprochés, confondus, le sixième côté est remplacé par la tangente en ce point; et les deux propriétés ont encore lieu, en ayant égard à la modification que subit le polygone; en 85 (b), les points e, f, et c, d, se confondent; et en 85 (c), les points a, b; c, d; e, f, se sont réunis; et l'hexagone est remplacé par deux triangles, inscrits et circonscrits.

Par six points, on peut faire passer 60 hexagones différens (7°); chacun fournit un groupe de trois points situés en ligne droite; mais on n'aura pas 180 points différens; car

plusieurs de ces droites passent par les mêmes points.

Ainsi, dans la *figure* 85 *bis*, de quelque manière qu'on place les lettres et qu'on varie la construction, les points de concours de 1, 4 et 2, 5, seront toujours situés sur la tangente au point F; car par le même point ne passe qu'une seule tangente.

6° Trois droites formant un faisceau harmonique, et allant dans le même sens, désignez par

a l'angle de la	1re droite avec la	2e,
b	2e	3e,
c	3e	4e.

On a toujours

$$\sin. a \sin. c = \sin. b \sin. (a+b+c),$$

et la réciproque a lieu.

7° Par m, points situés sur un même plan, on peut faire passer

$$\frac{1.2.3....m-1}{2} = 3.4.5.....m-1$$

polygones différens: il n'y en a qu'un seul qui soit convexe.

En effet, désignons les points par la suite des nombres naturels 1.2.3...m, on peut concevoir que tous les polygones commencent par le point 1; les points restans donnent 1.2....$m-1$ permutations; mais il y a toujours deux permutations qui donnent le même polygone; par exemple, les deux permutations 1.2.3...m et 1.m.$m-1$...... 3.2 donnent le même polygone; donc, etc.,

8° F étant un nombre de polygones tracés sur un plan et formant un ensemble, comme les carrés et les hexagones sur les parquets;

S étant le nombre des sommets, A le nombre des côtés; on a toujours

$$S + F = A + 1.$$

Cette remarque est due à M. Cauchy, membre de l'Académie des Sciences.

9° Entre tous les triangles de même périmètre et ayant un côté donné, le triangle de plus grande aire, le triangle *maximum*, est celui dans lequel les deux côtés non déterminés sont égaux.

10° Entre tous les polygones qui sont *isopérimètres*, c'est-à-dire qui ont des périmètres égaux et d'un même nombre de côtés, celui-là est un *maximum* qui a ses côtés égaux.

11° Entre tous les trapèzes de mêmes bases et de même hauteur, celui-là a le moindre périmètre, où la droite qui joint les milieux des bases leur est perpendiculaire.

12° Entre tous les triangles de même base, et ayant leurs sommets sur une même droite, celui-là a le plus petit périmètre dont les côtés indéterminés forment des angles égaux avec la droite.

13° De tous les polygones qu'on peut former avec des côtés donnés, celui qu'on peut inscrire dans un cercle a le *maximum* d'aire.

14° L'aire du cercle est plus grande que celle d'un polygone de même périmètre que la circonférence du cercle.

15° Le périmètre de la circonférence d'un cercle est plus petit que le périmètre d'un polygone de même aire que le cercle.

16° Le cercle a une plus grande aire qu'une courbe convexe fermée de même périmètre que la circonférence.

17° Si par un point pris arbitrairement dans l'intérieur d'un triangle, on mène des parallèles à ses trois côtés, ces droites divisent le triangle en six compartimens; savoir, trois parallélogrammes, et trois triangles; le produit des aires des parallélogrammes contient huit fois le produit des aires des triangles.

18° Si dans l'intérieur d'un quadrilatère convexe on décrit quatre cercles, touchant respectivement trois côtés, les quatre centres sont sur une même circonférence.

19° Un polygone de n côté est déterminé au moyen de $2n-3$ relations indépendantes entre les côtés et les angles.

De la génération des surfaces par des droites.

368. Un point qui se meut d'une manière quelconque trace dans l'espace une ligne dont la forme varie avec la nature du mouvement. Lorsqu'une ligne se meut dans l'espace, chacun de ses points trace une ligne, et l'ensemble de ces lignes forme une surface, trace de la ligne dans l'espace; et on dit alors que la surface a été engendrée par la ligne, et cette ligne porte le nom de *ligne génératrice*. Nous examinerons d'abord quelques surfaces engendrées par la ligne droite.

369. (*Fig.* 86.) Si l'on fait tourner le côté OL d'un angle droit LOC autour du côté OC, qui reste fixe, le côté mobile décrira un plan. En effet, soient OA, OA', deux positions quelconques de la droite mobile, par ces deux droites

on peut faire passer un plan. Menons dans ce plan une droite OL, divisant l'angle AOA′ en parties égales ; l'angle COL sera droit. Car il n'y a pas de raison pour que OC penche plus vers OL que vers son prolongement OL′; donc OL sera une troisième position de la génératrice. Divisant derechef l'angle formé par cette ligne, et la droite AL en parties égales, on prouve que cette ligne de division est aussi une position de la ligne génératrice, et il est facile de démontrer que deux de ces positions peuvent former un angle plus petit qu'aucun angle donné : donc la droite génératrice reste toujours dans le même plan.

Cette proposition peut aussi se démontrer directement. En effet, soit L un point quelconque situé dans l'intérieur de l'angle AOA′; menez SLT (PROB. LXI, p. 155), de manière que l'on ait SL = LT; menez les droites CS, CL, CI; or, L étant le milieu de SL, on a dans le triangle SOI,

$$OS^2+OI^2=2\,SL^2+2OL^2 \ (225)\,;$$

et dans le triangle CSL,

$$CS^2+CL^2=2\,SL^2+2\,CL^2\,;$$

et par soustraction

$$CS^2-OS^2+CL^2-OI^2=2CL^2-2OL^2.$$

Les triangles COS, COI, étant par hypothèse rectangles en O, l'on a

$$CS^2-OS^2=CO^2$$
$$CL^2-OI^2=CO^2\,;$$

donc l'équation ci-dessus se change en celle-ci

$$2.\,CO^2=2CL^2-2OL^2\,;$$

d'où

$$CO^2=CL^2-OL^2,$$

et

$$CL^2=CO^2+OL^2.$$

Le triangle COL est donc aussi rectangle en O (224).

370. De là on conclut, 1° que toute droite OC perpendiculaire à deux droites OA, OA′, menées par son pied dans un plan, est perpendiculaire à toutes les droites menées par son pied dans le même plan; 2° que tous les points de la génératrice OL décrivent des circonférences concentriques, situées dans un même plan, et ayant pour centre le pied de la perpendiculaire.

371. On dit qu'une droite CO est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est *perpendiculaire* à toutes les droites, menées par son pied dans le plan. Nous donnerons plus bas la raison de cette dénomination (p. 228); on dit aussi que *le plan est perpendiculaire à la droite.*

372. D'un point donné C on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à un plan; car si l'on pouvait en abaisser deux, en joignant leurs pieds par une droite, on formerait un triangle qui aurait deux angles droits, ce qui est absurde.

373. (*Fig.* 86.) D'un point O situé sur le plan PQ, on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire au plan. Supposons qu'on puisse en élever deux; faisant passer un plan par ces perpendiculaires, il coupera le plan PQ suivant une droite; par le même point O on pourrait donc, dans le même plan, élever deux perpendiculaires à une droite, ce qui est impossible: donc, etc.

374. Le plus court chemin d'un point C à

un plan PQ est la perpendiculaire CO, abaissée de ce point sur le plan; car toute autre droite CL étant une hypothénuse dans le triangle rectangle COL, est plus longue que CO.

375. Si l'on prend OM = OL, on aura l'oblique CM = CL; car les deux triangles rectangles, COM, COL, sont égaux: donc *les obliques également écartées de la perpendiculaire sont égales, et forment avec cette perpendiculaire des angles égaux.*

Il est facile de démontrer que la réciproque a lieu, et que de deux obliques inégalement écartées, la plus écartée est la plus longue, et réciproquement.

376. Les pieds des obliques égales, étant à distance égale du pied de la perpendiculaire, sont donc situés sur une circonférence qui a pour centre le pied de la perpendiculaire; de là découle un moyen pratique facile d'abaisser d'un point donné une perpendiculaire sur un plan; il suffit, après avoir pris, à partir de ce point, trois obliques égales, de faire passer une circonférence par les pieds des obliques; le centre de la circonférence est le pied de la perpendiculaire.

377. On donne aussi le nom de *projection* du point C sur le plan PQ au pied O de la perpendiculaire abaissée du point O sur ce plan; il suit de cette définition que tous les points situés sur la perpendiculaire CO ont tous pour projection sur le plan PQ le même point O. Le plan se nomme, en ce cas, *plan de projection.*

378. Si on conçoit la perpendiculaire CO prolongée au-dessous du plan PQ, et si l'on fait OC' = OC, les deux points C et C' sont dits être *symétriquement* placés par rapport au plan PQ; C' est le point symétrique de C, et réciproquement. Ainsi, deux points symétriques ont la même projection O sur le plan PQ de symétrie.

379. (*Fig.* 86.) Si, dans le plan PQ, on mène par le point quelconque L une perpendiculaire SLT à l'écartement OL, elle sera aussi perpendiculaire à l'oblique CL. En effet, menez CA, CA' faisant des angles égaux LOA, LOA' avec l'écartement OL, les triangles rectangles OLS, OLT, sont égaux, comme ayant un côté commun OL, adjacent à deux angles égaux: donc OS = OT, et LS = LT, et par conséquent les deux triangles rectangles COT et COS sont égaux, et l'on a CS = CT; mais les triangles CLT, CLS, ont le côté CL en commun, et deux autres côtés égaux chacun à chacun; ils sont égaux: donc l'angle CLT est égal à son adjacent CLS, c. q. f. d.; et réciproquement; si la droite SLT est perpendiculaire à l'oblique CL, elle sera aussi perpendiculaire à son écartement.

L'écartement OL, perpendiculaire à la fois à CO et à ST, est le plus court chemin entre ces deux droites; ce qui est facile à voir. Les droites OC, LS, étant prolongées à l'infini, ne peuvent jamais se rencontrer, et toutefois elles ne sont pas parallèles, parce qu'elles ne sont pas dans un même plan.

OL est *la projection de la droite* CT sur

la droite LOL′; si de tous les points de la droite CI on abaisse des perpendiculaires sur la droite LOL′, l'ensemble de ces perpendiculaires forme une surface qu'on nomme *paraboloïde*; cette surface est *infinie*. Car, on peut concevoir les droites CT, LO, prolongées à l'infini.

380. (*Fig.* 86.) Si par la perpendiculaire CO et l'oblique CL on fait passer un plan, il sera perpendiculaire à la droite ST; car cette ligne est à la fois perpendiculaire aux deux droites LC, LO menées par son pied dans le plan COL (370), et TL est perpendiculaire aux droites menées par L dans le plan OLC; de là on conclut que si par le point L on mène une parallèle à CO perpendiculaire sur PQ, cette parallèle sera aussi perpendiculaire sur le plan PQ. En effet, cette parallèle est, par définition, dans le plan COL; et comme elle passe par le point L, il s'ensuit que LT est perpendiculaire à cette parallèle, et réciproquement; mais cette parallèle est aussi perpendiculaire à OL; elle est donc à la fois perpendiculaire sur deux droites LO, LT, qui passent par son pied, et par conséquent elle est perpendiculaire au plan PQ.

381. De là il suit que deux perpendiculaires sur un même plan sont parallèles; car, si elles n'étaient pas parallèles, par le pied de la première, on pourrait mener une parallèle à la seconde, qui serait aussi perpendiculaire au plan (380); mais cette troisième perpendiculaire passe par le même point que la première, ce qui est absurde (373); donc, etc.

Et donc aussi, réciproquement, un plan per-

pendiculaire à une droite est aussi perpendiculaire à sa parallèle, et lorsqu'un plan est perpendiculaire à deux droites, elles sont nécessairement parallèles.

382. Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles; cette proposition a déjà été démontrée lorsque les droites sont dans un même plan (54) ; mais lorsqu'elles ne sont pas dans un même plan, concevons un plan perpendiculaire à cette troisième droite : il sera à la fois perpendiculaire sur les deux autres : donc celles-ci sont parallèles entre elles. De là il suit qu'une droite engendre un plan, lorsqu'elle se meut parallèlement à elle-même le long d'une droite donnée.

383. Si de trois points situés en ligne droite on abaisse des perpendiculaires sur un plan, 1° les trois perpendiculaires sont dans un même plan; 2° leurs trois pieds ou les trois projections des points sont sur une même droite. Car les trois perpendiculaires étant parallèles (381), on peut toujours mener un plan par la premiere et la seconde, un autre par celle-ci et la troisième, mais ces deux plans ont, en commun, la seconde perpendiculaire et la droite donnée : ils ne forment donc qu'un seul et même plan; or les projections des points sont situées dans ce plan et sur celui de projection : ils sont donc dans l'intersection des deux plans : ils sont donc en ligne droite.

Tous les points de la droite CL (*Fig.* 86) ont donc leurs projections situées sur la même droite OL; cette droite OL est dite la *projection* de CL sur OL. Ainsi, la projection d'une droite sur un plan, c'est la droite qui passe par les

pieds de toutes les perpendiculaires abaissées des points de la droite sur le plan.

Lorsque la droite est perpendiculaire au plan, sa projection se réduit à un point.

La projection d'une portion de droite non parallèle au plan est donc plus petite que cette droite; de là on démontre facilement que la projection du périmètre d'un polygone est plus petite que ce périmètre; il en est de même lorsque le polygone devient une ligne courbe.

384. (*Fig.* 86.) Si trois points C, K, L, sont situés en ligne droite, les trois points symétriques sont C', K', L, et sont aussi en ligne droite; car, en faisant tourner le triangle COL sur OL comme charnière, il est évident que CO s'applique sur C'O, IK sur IK', etc.; donc les points C', K', L sont aussi en ligne droite. Il suit de là, 1° que toute droite CL a pour symétrique une droite C'L; 2° que ces deux droites sont égales; 3° qu'elles sont également inclinées sur leur commune projection OL.

385. (*Fig.* 87.) L'angle CLO que fait la droite CL avec sa projection OL sur le plan PQ est plus petit que tout autre angle CLN, qu'elle fait avec une droite LN menée dans le plan PQ. En effet, prenez LO, égal à LN, et soit mené CN, les triangles CLN, CLO ont le côté CL en commun; le côté OL est égal à LN et CN > CO (374) : donc l'angle CLN est plus grand que CLO.

L'angle aigu CLO est donc le *minimum* des angles que fait l'oblique CL avec les droites menées par son pied dans le plan. Il est évident que l'angle obtus adjacent CLS est le *maximum* de ces angles.

386. On nomme *angle d'une droite avec un plan* celui qu'elle forme avec sa projection sur ce plan ; il est le même que l'angle *minimum*. Cet angle est nul lorsque la droite est dans le plan ; il est de 90° lorsque la droite est *perpendiculaire* au plan, et c'est ce qui a donné lieu à cette dénomination.

Une droite et sa symétrique sont également inclinées sur le plan de symétrie.

387. (*Fig.* 88.) Si une droite AB située hors du plan PQ est parallèle à CD située dans ce plan, AB ne pourra jamais rencontrer le plan PQ à quelque distance qu'on l'imagine prolongé. En effet, AB et CD étant dans le même plan, le point d'intersection, s'il existe, doit se trouver dans ce plan et dans le plan PQ : il est donc dans l'intersection CD de ces deux plans. La ligne AB rencontrerait sa parallèle CD, ce qui est impossible : donc cette intersection du plan et de la droite AB n'existe pas. On dit alors que la *droite est parallèle au plan, et vice versâ.*

388. (*Fig.* 88.) Si une droite AB étant parallèle au plan PQ, on mène par cette droite un plan quelconque ABCD, l'intersection CD des deux plans sera parallèle à la droite ; car elle ne peut la couper sans que AB ne rencontre le plan ; ce qui est contraire à la supposition.

389. Si par deux droites parallèles on fait passer deux plans qui se coupent, l'intersection sera parallèle aux droites. En effet, par un point quelconque pris sur l'intersection commune, concevons une parallèle à la première droite : elle sera située dans le premier plan ; mais comme elle est aussi parallèle à la deuxième droite (382), elle se trouvera aussi

dans le deuxième plan. Elle se confond donc avec l'intersection commune.

390. (*Fig.* 88.) CD, CK, étant deux droites situées dans le plan PQ, et AB, AL, deux droites hors de ce plan, AB étant parallèle à CD, et AL à CK, le plan LAB ne pourra jamais rencontrer le plan PQ, à quelque distance qu'on les prolonge, et ces deux *plans* sont dits être *parallèles*. En effet, l'intersection des deux plans, si elle existait, devrait être parallèle à la fois à CK et à CD (389), ce qui est impossible.

391. Les angles LAB, KCD formés par des côtés parallèles, chacun à chacun, sont égaux s'ils sont tournés dans le même sens, ou bien supplémentaires s'ils sont tournés en sens opposé. Prenez AL = CK; AB = CD; si on mène les droites AC, LK, la figure ACLK sera un parallélogramme, et par la même raison la figure ABCD est aussi un parallélogramme; KL et DB étant parallèles à AC sont parallèles, de plus elles sont égales : donc la figure BLKD est aussi un parallélogramme, et BL = DK. Par conséquent les triangles LAB, KCD, sont équilatéraux entre eux et égaux : donc l'angle LAB = KCD.

392. Les droites CD, AL, n'étant pas dans un même plan, si par un point C pris sur la première on mène une parallèle CK à la seconde, et que par un point A de celle-ci on mène une parallèle AL à la première, les deux angles LAB, KCD, sont constamment égaux, quelque part que l'on prenne les points C et A. C'est cet angle constant qui mesure l'inclinaison de deux droites qui ne sont pas dans un même plan; on obtient aussi cet angle en menant par un point quelconque de l'espace une parallèle

à chacune de ces droites. Ainsi, dans la *fig.* 86, les deux droites CO, TS, sont deux droites *perpendiculaires*. On conclut de ceci que deux droites parallèles sont également inclinées sur une troisième droite située hors de leur plan; mais la réciproque n'a pas lieu. On démontre facilement que par deux droites, non situées dans un même plan, on ne peut mener qu'un seul système de deux plans parallèles. (Voir Note 14.)

393. Deux plans parallèles étant coupés par un troisième, les intersections sont parallèles, car si elles se rencontraient, les plans se rencontreraient; ce qui est contraire à la supposition.

394. (*Fig.* 88.) De là on déduit que lorsque deux droites AL, CK, sont parallèles, leurs projections AB, CD, sur le plan PQ sont aussi parallèles. En effet, soient B la projection du point L, et D celle du point K; LB et KD, perpendiculaires au plan PQ, sont parallèles; AL et CK sont aussi parallèles par hypothèse: donc les plans LAB, KCD, sont parallèles (390). Or, AB et CD sont les intersections de ces plans avec le plan PQ: donc elles sont parallèles (393).

395. Les inclinaisons LAB, KCD, des deux droites parallèles sur un plan sont donc égales; la réciproque de cette proposition n'a pas lieu.

396. Il est facile aussi de démontrer que les symétriques des deux droites parallèles sont aussi parallèles entre elles.

397. Toutes les droites (*fig.* 88 *b*, *Pl.* V) qui partent d'un même point S sont coupées proportionnellement par des plans parallèles PQ, SR; car AB et A'B' étant parallèles, l'on a SA : SB' :: SB : SB', etc.

398. Réciproquement, si les points A, B, C, D, étant dans un même plan, on prolonge proportionnellement les lignes SA, SB, SC, SD, les points A′, B′, C′, D′ seront dans un même plan parallèle au plan ABCD.

Angles dièdres.

399. (*Fig.* 89.) Si le plan LMAB tourne autour de l'axe fixe AB, chacun des points du plan décrira un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe fixe, qu'il coupe en un point, qui est le centre du cercle (370), et tous les points L, M, situés sur des droites parallèles à l'axe décrivent des cercles égaux. Supposons le plan parvenu dans la position L′BAM′, on aura BL′ parallèle à AM′, et l'angle L′BL égal à l'angle M′AM (391), et l'arc LL′ égal à l'arc MM′. On nomme angle *dièdre* (*dis*, deux, *edra*, plan) l'écartement angulaire du plan de sa première position; si cet écartement augmente, si le plan arrive dans la position L″AM″, et si on a de plus L″L′ = LL′, il est évident que l'angle dièdre LBL′MAM′ pourra entrer exactement dans l'angle dièdre L′BL″M′AM″ : ces deux angles dièdres sont donc égaux. Si l'arc LL″ contenait trois fois l'arc LL′, on pourrait placer trois angles dièdres tels que LM′ dans l'angle dièdre LM″; et en général les angles dièdres sont entre eux dans le même rapport que les arcs LL′, LL″, ou, ce qui revient au même, l'angle dièdre croît proportionnellement à l'angle LBL″, formé par les intersections des deux plans avec un plan perpendiculaire à leur intersection commune.

400. L'arc LL′ peut donc servir de mesure à l'angle dièdre ; ainsi, lorsque cet arc est égal à un cadran, l'angle dièdre devient *rectangle*, et c'est à cet angle dièdre qu'on rapporte tous les autres. Etant donnés, par exemple, deux plans dont il s'agit de mesurer l'écartement, on mène un troisième plan perpendiculaire à l'intersection commune ; il coupera les deux plans suivant deux droites ; ce qui revient à mener, par un point quelconque de l'intersection, deux perpendiculaires à cette ligne dans les deux plans ; supposons que ces droites fassent entre elles un angle de 37° ; alors l'angle dièdre sera de 37°, c'est-à-dire que cet angle dièdre est contenu dans un angle dièdre rectangle autant de fois que 37 degrés sont contenus dans 90 degrés. *Deux plans sont perpendiculaires*, lorsqu'ils forment entre eux un angle droit.

401. Afin d'éviter la confusion, lorsqu'elle peut avoir lieu, on nomme donc *angles plans*, ceux qui sont formés par deux droites. Les angles *dièdres* se mesurent par des angles plans, mais ne sont pas de même espèce que ces angles.

Deux plans étant suffisamment prolongés se coupent en formant quatre angles dièdres : deux opposés aigus et deux opposés obtus. Il est facile de démontrer que, 1° les angles opposés sont égaux ; 2° la somme des deux angles adjacens est égale à deux angles droits ; 3° la somme des quatre angles est égale à quatre angles droits.

Et en général, si, par une même droite, on fait passer tant de plans qu'on voudra,

la somme des angles dièdres est toujours égale à quatre angles droits.

402. Si, d'un point quelconque, on abaisse deux perpendiculaires sur deux plans, l'angle formé par les perpendiculaires est le supplément de l'angle formé par les plans.

403. (*Fig.* 90.) Tout plan RS passant par une droite LM, perpendiculaire au plan PQ, est perpendiculaire à ce plan. En effet, menons par le pied L, dans le plan PQ, une perpendiculaire LE à l'intersection RT, l'angle MLE est droit, et mesure l'inclinaison des deux plans PQ, RS (400); donc ces plans sont perpendiculaires.

404. (*Fig.* 90.) Le plan RS étant perpendiculaire sur PQ, si on élève dans le plan RS une perpendiculaire LM sur l'intersection RT, elle sera aussi perpendiculaire au plan. En effet, menons LE perpendiculaire sur RT, l'angle MLE, mesurant l'inclinaison des deux plans, est droit par hypothèse; donc ML est à la fois perpendiculaire sur RT et sur LF; donc, etc. (369).

405. Dans la même supposition, si, par un point L de l'intersection, on élève une perpendiculaire au plan PQ, elle sera dans le plan RS; car elle doit coïncider avec la droite ML perpendiculaire sur RT: sans cette coïncidence, on pourrait, par le même point, élever deux perpendiculaires sur un plan, ce qui est impossible.

406. Deux plans perpendiculaires à un troisième sont, ou parallèles, ou bien se coupent, suivant une droite perpendiculaire à un troisième plan; car, élevant, par un point de l'in-

tersection, une perpendiculaire à ce troisième point, elle devra se trouver à la fois dans les deux plans perpendiculaires (405); elle se confond donc avec l'intersection commune.

407. (*Fig.* 88 *a.*) Deux plans parallèles RS, PQ, étant coupés par un troisième, on a, comme pour des droites parallèles, coupées par une sécante, 1° les angles alternes-internes égaux; 2° les angles correspondans égaux; 3° la somme des angles intérieurs égale à deux angles droits: car les intersections AB et CD étant parallèles (393), si l'on mène un quatrième plan perpendiculaire à AB, il sera aussi perpendiculaire sur CD (381). Soient IKK', KL, K'L' les intersections de ce quatrième plan avec les trois; KL et K'L' sont deux droites parallèles, coupées par la sécante IKK'; mais IKL, IK'L' mesurent les inclinaisons du plan TV sur RS et PQ; donc, etc.

La réciproque de ces propositions n'a pas lieu; mais on en conclut que deux plans parallèles à un troisième sont parallèles entre eux.

Par un point donné on peut mener un plan parallèle à un plan donné; ce plan est unique.

Par un point donné on peut toujous mener un plan perpendiculaire à une droite donnée; ce plan est unique.

Par un point donné on peut mener une infinité de plans parallèles à une droite donnée.

Par une droite donnée on peut toujours faire passer un plan perpendiculaire à un plan donné.

Par deux droites, on ne peut faire passer que deux plans parallèles.

Deux droites formant un angle droit, on peut faire passer par l'une un plan perpendiculaire à l'autre ; ce plan est unique.

408. Quatre plans passant par la même droite forment un *faisceau harmonique*, lorsque le produit du sinus de l'angle moyen, multiplié par le sinus de l'angle total, est égal aux produits des sinus des angles extrêmes. On démontre facilement, comme on a fait (232), que toutes les droites interceptées entre ces quatre plans sont coupées harmoniquement.

409. D'un point donné S partent tant de droites qu'on voudra ; si on prend sur la première les segmens SA, AB, BC, en proportion harmonique ; de même sur la seconde les segmens SA', A'B', B'C', et ainsi des autres ; si les points A, A', A'', A''', sont dans un plan, et les points B, B', B'', B''', aussi dans un second plan : les points C, C', C'', C''', seront dans un troisième plan, et les trois plans passent par la même droite ; c'est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

Ces trois plans, et le quatrième déterminé par la droite d'intersection et le point S, forment un faisceau harmonique.

Angles solides.

410. Lorsqu'on considère trois plans relativement à leur position mutuelle, il peut arriver, 1° qu'ils soient parallèles entre eux, alors il n'y a aucune intersection ; 2° que deux soient parallèles, alors il y a deux droites d'intersections parallèles ; 3° que les plans se coupent

deux à deux, suivant trois droites parallèles; 4° (*Fig.* 91) que les plans se coupent suivant trois droites non parallèles, alors ces trois droites se rencontrent nécessairement en un même point.

L'espace angulaire, formé par les trois plans RSP, RSQ, PSQ, se nomme *angle solide trièdre* (*treis*, trois, *edra*, plan), et le point d'intersection S en est le *sommet*, et les lignes SP, SR, SQ, intersections des plans, sont les *côtés* de l'angle; ainsi dans tout angle solide trièdre on rencontre, 1° un sommet; 2° trois côtés; 3° trois angles plans, RSP, RSQ, PSQ; 4° trois angles dièdres; savoir: le plan RSP sur PSQ, RSP sur RSQ, et RSQ sur RSP; il faut se représenter SR comme étant élevé au-dessus du plan de la figure.

411. Si on prolonge les trois plans dans tous les sens, on formera huit angles solides, qui sont deux à deux directement opposés par le sommet; ainsi l'angle SP′ Q′R′ est opposé, par le sommet, à l'angle SPQR. Ces deux angles ont les angles plans et les angles dièdres égaux chacun à chacun, et ne peuvent pourtant entrer l'un dans l'autre, car les inclinaisons ne sont pas semblablement disposées. Par exemple, l'inclinaison de RSQ sur RSP est à droite dans l'angle SPRQ, et elle est à gauche dans l'angle SP′R′Q; c'est la même chose que si on portait RSQ en PSR″ et PSR en R″SQ; les deux angles solides PSRQ, PSR″Q, quoique formés par des angles plans et dièdres égaux, ne peuvent pourtant se recouvrir; mais les deux angles SR′P′Q′,

SPR″Q sont égaux et peuvent s'appliquer l'un sur l'autre.

(*Fig.* 91 *bis.*) Si, d'un point quelconque R pris sur SR, on abaisse la perpendiculaire RO sur le plan PSQ, et si on prolonge cette perpendiculaire d'une longueur OR‴ égale à elle-même, la droite SR‴ sera la symétrique de SR, et l'angle solide SPQR‴ aura encore les angles plans et dièdres égaux à ceux de l'angle SPQR; mais ils ne peuvent pourtant se superposer. Cette sorte d'égalité, qui ne permet pas la superposition, se nomme *égalité par symétrie*, et l'angle solide SPR‴Q est dit l'*angle symétrique* de l'angle solide SPQR; mais les trois angles solides R″SPQ, R‴SQP, R′SP′Q′ sont égaux avec superposition.

412. Soient a, b, c, trois angles plans d'un angle solide S,

A l'angle dièdre que forme b avec c,
B a c,
C a b.

Si, d'un point pris dans l'intérieur de l'angle solide, on abaisse trois perpendiculaires sur les plans des angles a, b, c, on aura les trois côtés d'un second angle solide S′: désignons par

a' l'angle formé par les perpendic. sur b et c,
b' a c,
c' a b,
A′ b' c',
B′ a' c',
C′ a' b',

On aura

l'angle a' suppl. de l'angle A (402)
b' B
c' C

mais les trois côtés de l'angle solide S seront aussi perpendiculaires aux trois plans de l'angle S′ (406); donc on aura

a supplément de A′
b B′
c C′.

L'angle solide S′ est dit *angle supplémentaire* de l'angle S : les angles de l'un étant donnés, on connaît donc aussi les angles de l'autre.

413. Problème XCI. (*Fig.* 92.) Etant donnés les angles plans a, b, c, d'un angle solide S, trouver, par une construction plane, les trois angles dièdres?

Solution. Supposez que le plan PSR (a) tourne autour du côté PS et vienne se placer dans le plan de PSQ (b), et QSR′ (c) de même; prenez SR d'une longueur arbitraire, et faites SR′ = SR; abaissez sur SP, SQ les perpendiculaires RC, R′A, se rencontrant en I; élevez en I les perpendiculaire IL, IL′, et faites

$$CL = CR$$
$$AL' = AR';$$

l'angle LCI sera l'angle C ou l'inclinaison de a sur b,
L′AI A ou b c.

En effet, on a, par construction,

$$LI^2 = CL^2 - CI^2 = CR^2 - CI^2 = SR^2 - SI^2;$$

et de même

$$L'I^2 = AL'^2 - AI^2 = AR'^2 - AI^2 = SR'^2 - SI^2;$$

or $SR = SR'$;

donc $IL = IL'$.

Faisons tourner les triangles LIC, L′IA autour de CI et de AI, jusqu'à ce que LI, L′I

soient perpendiculaires au plan PSQ; alors IL, IL', coïncideront, et l'on aura

$$SL = SR = SR',$$

et l'angle $LSC = RSC$

$$LSA = R'SA.$$

De plus, le plan LCI étant alors perpendiculaire sur SC, l'angle C mesurera l'inclinaison de *a* sur *b*; et, par la même raison, l'angle A mesurera l'inclinaison de *c* sur *b*.

Elevez les perpendiculaires RG, R'H sur RS et R'S; faites

$$BH = HR'$$
$$BG = GR$$

L'angle GBH ou B sera l'inclinaison de *a* sur *c*; car, faisant tourner les triangles SR'H, SRG, autour de SH et de SG, jusqu'à ce que R' tombe sur R; dans cette position, le plan GRH est perpendiculaire sur SR, et l'angle GRH = GBH mesure l'inclinaison des deux plans *a* et *c*.

414. Pour que cette construction soit possible, il faut que l'on ait évidemment

$$LC \text{ ou } CR > CI$$
$$L'A \text{ ou } AR' > AI.$$

De là on conclut qu'on doit avoir

$$\text{angle } CSI < CSR$$
$$ASI < ASR',$$

et ainsi $ASI + CSI = CSA < CSR + ASR'$. Ainsi, pour qu'un angle trièdre soit possible, il faut que le plus grand angle plan soit plus petit que la somme des deux autres; que l'on ait $b < a + c$.

415. Les triangles LCI, L'AI donnent

$$\sin. C = \frac{LI}{CL} = \frac{LI}{CR} = \frac{SR \sin. a}{LI}$$

$$\sin. A = \frac{L'I}{AL'} = \frac{L'I}{AR'} = \frac{L'I}{SR' \sin. c};$$

d'où $$\frac{\sin. C}{\sin. A} = \frac{\sin. c}{\sin. a}.$$

Ainsi, dans un angle trièdre, les sinus des angles plans sont entre eux comme les sinus des angles dièdres opposés, et de là on conclut, 1° qu'au plus grand angle dièdre est opposé le plus grand angle plan, *et vice versâ*; 2° que lorsque les angles plans sont égaux, les angles dièdres opposés sont égaux, *et vice versâ*; 3° lorsque deux angles trièdres ont les angles plans égaux chacun à chacun, et également disposés, ils sont égaux et superposables.

416. PROBLÈME XCII. Etant donnés les trois angles dièdres A, B, C, d'un angle trièdre, trouver les angles plans par une construction plane?

Solution. Soient a, b, c, les angles plans cherchés; dans l'angle solide supplémentaire, vous connaissez les trois angles plans a', b', c'; car $a'=180°-A$, $b'=180°-B$, $c'=180°-C$ (412), d'après le problème précédent, cherchez les trois angles dièdres A', B', C', et vous aurez $a = 180°-A'$, $b = 180°-B'$, $c = 180°-C'$; ce qu'il fallait trouver.

417. Dans le triangle supplémentaire, l'on a

$$a' < b' + c';$$

d'ou $180°-A < 180°-B+180°-C$

$$180°-A < 360°-B-C;$$

d'où $B+C < 180°+A$.

Ainsi, dans un angle trièdre, la somme des

deux angles dièdres est toujours plus petite que le troisième angle dièdre augmenté de 180°.

On a aussi $A + C < 180° + B$

$A + B < 180° + C$;

ajoutant les inégalités, il vient

$$2A + 2B + 2C < 3 . 180° + A + B + C;$$

d'où $A + B + C < 3 . 180°$.

Donc dans un angle trièdre, la somme de trois angles dièdres est toujours plus petite que six angles droits.

418. On conclut du problème précédent, que deux angles trièdres sont égaux et superposables, lorsqu'ils ont les angles dièdres égaux chacun à chacun, et également disposés.

419. PROBLÈME XCIII. (*Fig.* 92.) Etant donnés les angles plans *a*, *b*, et l'angle dièdre compris C, trouver l'angle *c* ?

Solution. De R rabattu dans le plan *b*, abaissez la perpendiculaire RCI ; faites en C l'angle ICL égal à l'angle donné C, et prenez CL = CR ; abaissez la perpendiculaire LI ; du point I ainsi déterminé, abaissez la perpendiculaire IAR′ sur SA, et élevez sur IA la perpendiculaire IL′ égale à IL ; portez AL′ de A en R′ ; menez SR′ ; l'angle R′SA sera l'angle cherché *c*.

Pour comprendre cette solution, il suffit de relire celle du problème (413).

420. PROBLÈME XCIV. Etant donnés les deux angles dièdres A et B, et l'angle plan *c* qui leur est commun, construire l'angle C ?

Solution. Au moyen du triangle supplémentaire.

421. On voit qu'on peut résoudre sur les angles trièdres, les problèmes analogues à

ceux dont les triangles sont l'objet ; et trois quelconques des six angles font connaître les trois autres ; on peut aussi leur appliquer les mêmes procédés de calcul ; et c'est ce qui donne lieu à une trigonométrie qu'on pourrait appeler *solide* pour la distinguer de la trigonométrie plane ; mais elle a été nommée *trigonométrie sphérique*, pour des motifs que nous exposerons plus bas. Ici, nous donnerons succinctement les principales formules de cette trigonométrie, et à l'instar d'Euler nous nous servirons pour cet effet de la construction que nous avons faite pour trouver l'angle B (page 239) ; pour plus de simplicité, nous supposons que $SR = 1$;

alors
$$GB = RG = \text{tang.}\, a$$
$$BH = HR' = \text{tang.}\, c$$
$$SG = \text{séc.}\, a$$
$$SH = \text{séc.}\, c$$

Or, l'on a (prop. LXIX, page 190) dans les triangles GSH et GBH,

$$GH^2 = SG^2 + SH^2 - 2\, SG \,.\, SH \cos.\ GSH$$
$$GH^2 = GB^2 + BH^2 - 2\, GB \,.\, BH. \cos.\ GBH\,;$$

d'où $SG^2 + SH^2 - 2\, SG \,.\, SH \cos.\ GSH =$
$$= GB^2 + BH^2 - 2\, GB \,.\, BH \cos.\ GBH\,;$$

ou bien

$$\text{séc.}^2\, a + \text{séc.}^2\, c - 2\, \text{séc.}\, a\, \text{séc.}\, c \cos.\, b =$$
$$= \text{tang.}^2\, a + \text{tang.}^2\, c - 2\, \text{tang.}\, a\, \text{tang.}\, c \cos.\, B\,;$$

mais
$$\text{séc.}^2\, a - \text{tang.}^2\, a = 1$$
$$\text{séc.}^2\, c - \text{tang.}^2\, c = 1\,;$$

transposant et réduisant, il vient

$$2\, \text{séc.}\, a\, \text{séc.}\, c \cos.\, b = 2 + 2\, \text{tang.}\, a\, \text{tang.}\, c \cos.\, B$$

$$\frac{\cos.\, b}{\cos.\, a \cos.\, c} = 1 + \frac{\sin.\, a}{\cos.\, a}\frac{\sin.\, c}{\cos.\, c}\cos.\, B\,;$$

d'où

$\cos. b = \cos. a \cos. c + \sin. a \sin. c \cos. B$ (1);
on a de même
$\cos. c = \cos. b \cos. a + \sin. b \sin. a \cos. C$ (2)
$\cos. a = \cos. c \cos. b + \sin. c \sin. b \cos. A$ (3).

Connaissant trois de ces six angles que l'on considère dans un angle trièdre, on peut, à l'aide de ces formules, calculer les trois autres.

Appliquant ces formules au triangle supplémentaire, l'on a $b' = 180° - B$,
et par conséquent $\cos. b' = -\cos. B$;
et ainsi des autres angles $\sin. b' = \sin. B$.

Substituant ces valeurs, dans ces formules, l'on aura

$$\left.\begin{array}{l}\cos. B = \sin. A \sin. C \cos. b - \cos. A \cos. C \ (4) \\ \cos. C = \sin. B \sin. A \cos. c - \sin. A \sin. B \ (5) \\ \cos. A = \sin. B \sin. C \cos. a - \sin. B \sin. C \ (6)\end{array}\right\} N.$$

Ces trois dernières formules peuvent aussi servir à calculer numériquement toutes les questions de la trigonométrie sphérique.

Mais il s'agit de rendre ces six formules propres aux calculs par logarithmes.

422. PROBLÈME XCV. *Exemples.* Etant donnés les angles plans a, b, c, calculer l'angle dièdre B?

La formule (1) donne

$$\cos. B = \frac{\cos. b - \cos. a \cos. c}{\sin. a \sin. c};$$

d'où $1 - \cos. B = 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} B =$

$$= \frac{\sin. a \sin. c + \cos. a \cos. c - \cos. b}{\sin. a \sin. c} =$$

$$= \frac{\cos. (a - c) - \cos. b}{\sin. a \sin. c} =$$

$$= \frac{2 \sin. \tfrac{1}{2}(a - c + b) \sin. \tfrac{1}{2}(b + c - a)}{\sin. a \sin. c}$$ (voir Table 8);

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin. \tfrac{1}{2}(a+b-c) \sin. \tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin. a \sin. c}.$$

Faisons $a+b+c=2S$, il vient

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin. (S-a) \sin. (S-c)}{\sin. a \sin. c};$$

$$\sin. \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin. (S-a) \sin. (S-c)}{\sin. a \sin. c}}.$$

Supposons $a=b=c=60^\circ$;
alors $S=90^\circ$

$$S-a=30^\circ$$
$$S-c=30^\circ;$$

$$\sin. \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin. 30^2}{\sin. 60^2}} = \frac{\sin. 30}{\sin. 60} =$$

$$= \frac{\sin. 30^\circ}{2 \sin. 30^\circ \cos. 30^\circ} = \frac{1}{2 \cos. 30^\circ} = \tfrac{1}{2} \text{séc. } 30^\circ;$$

$$\sin. \tfrac{1}{2} B = 0{,}5773502$$
$$\tfrac{1}{2} B = 35^\circ.15'$$
$$B = 70^\circ.30';$$

ou par logarithmes

$$\log. \sin. \tfrac{1}{2} B = \log. \text{séc. } 30^\circ - \log. 2$$
$$\log. \text{séc. } 30^\circ = 0{,}0624694$$
$$\log. 2 = 0{,}3010300$$

$$\log. \text{séc. } \tfrac{1}{2} B = 0{,}7614394 - 1 =$$
$$= \log. \sin. 35^\circ.15'.32''$$

$$B = 70^\circ.31'.44'' = C = A; \cos. B = \tfrac{1}{3};$$

$$\text{car } \cos. B = \frac{\cos. 60^\circ - \cos.^2 60^\circ}{\sin.^2 60} = \frac{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}}{1 - \tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{3}.$$

On trouve encore

$$\cos. \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin. S \sin. (S-b)}{\sin. a \sin. c}};$$

et par conséquent

$$\sin.\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}B=\frac{\sin.B}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\sin.S\sin.(S-b)\sin.(S-c)}}{\sin.a\sin.c};$$

$$\sin.B=\frac{2\sqrt{S(S-a)S-b)(S-c)}}{\sin.a\sin.c};$$

de là on peut conclure encore que les sinus des angles plans sont proportionnels aux sinus des angles dièdres opposés (page 240).

423. Traitant de même l'équation (4), p. 243, on en tire

$$\sin.^2\tfrac{1}{2}b=-\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos.\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\sin.A\sin.C}.$$

Or, $A+C<180^\circ+B$ (417),

d'où $A+C-B<180^\circ$,

$\tfrac{1}{2}(A+C-B)<90^\circ$:

donc $\cos.\tfrac{1}{2}(A+C-B)$ est positif.

Il faut donc que $\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)$ soit négatif; ou que l'on ait $\tfrac{1}{2}(A+B+C)>90^\circ$:

ou $A+B+C>180^\circ$.

Ainsi, dans un angle trièdre, la somme des angles dièdres est plus grande que deux angles droits, et moindre que six (page 241).

Faisons $A+B+C=2S'$, il vient

$$\sin.\tfrac{1}{2}b=\sqrt{-\frac{\cos.S'\cos.(S'-B)}{\sin.A\sin.C}},$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\cos.(S'-A)\cos.(S'-C)}{\sin.A\sin.C}};$$

$$\sin. b = \frac{\sqrt{-\cos. S' \cos. (S' - A) \cos. (S' - C)}}{\sin. A \sin. C}.$$

On peut donc calculer les angles plans lorsqu'on connaît les angles dièdres.

424. Supposons $B = 90°$, alors l'angle s'élève à un angle dièdre rectangle.

On a de plus les équations suivantes, qui servent à répondre à toutes les questions qui ont rapport aux trièdres rectangles :

$$\cos. B = o,$$

$$\cos. b = \cos. a \cos. c = \text{tang. } A \text{ tang. } C,$$

$$\frac{\sin. a}{\sin. A} = \frac{\sin. c}{\sin. C} = \sin. b,$$

$$\text{tang. } b = \frac{\text{tang. } c}{\sin. C \cos. a} = \frac{\text{tang. } a}{\sin. A \cos. c}.$$

425. (*Fig.* 92.) On peut toujours décomposer un angle trièdre en deux angles trièdres rectangles. En effet, supposons que les angles RSP, R'SQ, soient dans leur position véritable où elles forment un angle solide avec PSQ : alors la ligne SI sera la projection de SR ou SR'; et le plan passant par SI, et SR étant perpendiculaire au plan PSQ, divise l'angle trièdre en deux angles trièdres rectangles, savoir : SIR'Q et SIRP. A l'aide de cette décomposition, il est facile de calculer tous les angles de l'angle trièdre lorsqu'on connaît deux angles plans et l'angle dièdre compris, ainsi qu'on a opéré pour le même cas dans les triangles (page 190); et à l'aide du triangle suppémentaire, on ramène à ce même problème celui où l'on connaît un angle plan et deux angles dièdres adjacens.

Angles solides polyèdres.

426. (*Figure* 93.) Lorsque quatre plans PSQ, QSR, RST, TSP, n'ont qu'un seul point S en commun, ils forment un espace angulaire qu'on a désigné sous le nom de *angle solide tétraèdre*; il renferme quatre angles plans, quatre angles dièdres, un sommet S, et quatre côtés ou arêtes. En menant le plan diagonal SPR, on décompose l'angle tétraèdre en deux angles trièdres; il faut trois données pour déterminer un des angles tétraèdres, et comme ils ont un angle plan en commun, il ne faudra plus que deux données pour déterminer le second angle tétraèdre : par conséquent il faut cinq données pour déterminer un angle tétraèdre. Un trièdre peut présenter un angle rentrant, comme dans la *fig.* 93 *bis*; mais ce cas-ci se ramène facilement à celui où il n'y a pas d'angles rentrans. Nous ne considérerons par la suite que des angles solides convexes.

427. (*Fig.* 94.) On nomme, en général, *angle solide polyèdre* l'espace angulaire formé par plusieurs angles plans, qui se réunissent en un même point S; dans la *fig.* 94 on voit la réunion de cinq plans, qui forment un angle pentaèdre : ils renferment cinq angles plans, autant d'angles dièdres, un angle pentaèdre au sommet, cinq côtés ou arêtes, et il faut $3+2=5$ données pour le déterminer; en général un angle solide, formé de n angles plans, est déterminé par

$$3+2(n-3)=3+2n-6=2n-3 \text{ données.}$$

428. (*Fig.* 94.) Menons un plan quelconque PQRUT, coupant les faces de l'angle solide

suivant les droites PQ, QR, RU, UT, TP, dont la réunion forme le polygone PQRUT, on aura un espace fermé, composé de l'angle S et des angles trièdres P, Q, R, U, T; ces cinq angles solides sont formés par vingt angles plans, par les quinze angles des triangles et les cinq du polygone; or les angles des triangles pris ensemble valent dix angles droits; ceux du polygone pris ensemble ne valent que $10-4=6$ angles droits, ou quatre angles droits de moins mais dans l'angle trièdre U l'on a

$$\text{SUT}+\text{SUR} > \text{RUT} \ (414);$$

et de même dans les autres trièdres. Par conséquent, dans les triangles, la somme des angles adjacens aux bases PQ, QR, RU, UD, TU, est plus grande que la somme des angles du polygone. Il faut donc que la somme des angles plans réunis autour de S soit plus petite que quatre angles droits.

Soit en général m la somme des angles au sommet; p la somme des angles à la base, q la somme des angles du polygone, on aura

$$m+p-q=4 \text{ angles droits},$$

ou $$m=4^{\text{q}}-p+q;$$

mais $p>q$: donc $m<4$ angles droits.

429. Si d'un point quelconque dans l'espace on abaisse des perpendiculaires sur les faces d'un angle solide, composé de n plans, on formera un angle solide supplémentaire (p. 237). Soient a', b', c', d', les angles plans de cet angle solide, on aura donc

$$a'+b'+c'+d'+\ldots<2.180^{\circ} \ (428),$$

ou bien.

$$180^{\circ}-\text{A}+180-\text{B}+180^{\circ}-\text{C}+\ldots<2.180,$$

$$n.\,180^\circ - A - B - C - D + \ldots < 2.180,$$
$$A + B + C + D + \ldots > (n-2)\,180.$$

La somme des angles dièdres d'un angle solide convexe est donc toujours plus grande que deux angles droits et plus petite que six angles droits répétés chacun autant de fois qu'il y a de côtés moins deux.

Lorsque $n = 3$, alors $A + B + C > 180$; ce qui s'accorde avec ce qui a été trouvé ci-dessus (423).

Polyèdres; pyramides.

430. On nomme en général un *solide*, tout espace fermé par des surfaces; lorsque ces surfaces sont planes, le solide prend le nom de *polyèdre*. Les intersections de ces plans forment les *arêtes* du polyèdre; l'ensemble des arêtes situées dans le même plan sont les faces, et le polyèdre est *convexe* lorsqu'une quelconque de ses faces étant prolongée, laisse tous les sommets d'un même côté. Nous ne considérerons que des polyèdres convexes.

431. Par quatre sommets non situés dans un même plan S, P, Q, R, on ne peut faire passer qu'un seul polyèdre SPQR; il suffit de mener des plans par les sommets pris trois à trois. Ce polyèdre, le plus simple de tous, se nomme *tétraèdre* : il renferme quatre faces triangulaires, quatre angles solides trièdres, douze angles dièdres, douze angles plans, six arêtes.

Soient maintenant donnés cinq sommets; en les prenant trois à trois on pourra mener dix plans; soient A, B, C, D, E, ces cinq

sommets, on aura ces divers systèmes de polyèdres :

1° ABC, BCD, CDE, DEA, EAB;

2° ABD, BDC, DCE, CEA, EAB, etc.

Tous ces polyèdres auront des faces triangulaires, selon la position respective des sommets. Il peut arriver qu'aucun de ces polyèdres ne soit convexe ; en tout cas, il ne saurait exister plus d'un polyèdre convexe passant par les mêmes sommets ; s'il y en avait deux, les faces du second couperont celles du premier polyèdre, et par conséquent il aura des sommets à droite et à gauche : ce qui est contraire à la définition des polyèdres convexes.

(*Fig.* 93.) Si quatre des sommets donnés sont dans un même plan, le polyèdre aura quatre faces triangulaires et une face quadrilatère.

432. Soient en général n sommets par lesquels il faut faire passer un polyèdre convexe ; par ces sommets pris trois à trois, on pourra faire passer des plans dont le nombre est exprimé par $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, au cas que tous ces plans diffèrent de position.

Parmi tous ces plans, on prend celui ou ceux qui laissent tous les sommets d'un même côté ; si aucun plan ne satisfait à cette condition, aucun polyèdre convexe ne peut avoir les points donnés pour sommet. Soit ABC le plan passant par les sommets A, B, C, et remplissant la condition voulue : si ce plan ne rencontre pas d'autre sommet, le triangle ABC sera une des faces du polyèdre cherché. Si le plan passe encore par un quatrième som-

met D, le polyèdre aura une face quadrangulaire ABCD, et ainsi de suite. Par une des arêtes de cette face et par un sommet extérieur, on mène un plan qui satisfait à la même condition que le premier, et on continuera jusqu'à ce que le polyèdre soit fermé de toute part. On prouve comme ci-dessus (431), qu'il n'existe qu'un seul polyèdre convexe passant par les mêmes sommets.

433. Lorsque les sommets, à l'exception d'un seul, sont situés dans un même plan, le polyèdre prend le nom de *pyramide*. Il est formé de faces triangulaires et d'une face polygonale, à laquelle on donne le nom de *base*; et le sommet hors de la base se nomme, plus particulièrement, *le sommet de la pyramide*. Ainsi, la *fig.* 93 représente une *pyramide* dite *quadrangulaire*, parce que la base PQRT est un quadrilatère. Le tétraèdre SPQR (*Figure* 94 *a*) est une pyramide à base triangulaire, et chaque face pouvant être considérée comme base, il s'ensuit que la pyramide tétraèdre a quatre bases et quatre sommets. On entend par *hauteur* d'une *pyramide*, la distance du sommet à sa base, ou la perpendiculaire abaissée du sommet sur cette base; un tétraèdre a quatre hauteurs.

Une *pyramide* est dite *régulière* lorsque sa base est un polygone régulier, dont le centre est la projection du sommet: alors toutes les faces sont des triangles isocèles égaux.

434. (*Fig.* 94.) On peut toujours trouver un point également éloigné des quatre sommets du tétraèdre SPQR. En effet, si, par le centre du cercle circonscrit à une des faces PQR, on élève une perpendiculaire à cette

face, tous les points de cette droite sont également éloignés des sommets P, Q, R (377); de même la perpendiculaire élevée par le centre du triangle SQR sur ce plan. Or, ces deux perpendiculaires sont dans le plan passant par le milieu de QR, perpendiculairement à cette arête; l'intersection des deux perpendiculaires donne donc un point également éloigné des quatre sommets P, Q, R, S. On peut faire la même construction sur chaque face : donc les quatre perpendiculaires passent par le même point; c'ést aussi celui par lequel passent les six plans menés par les milieux des arêtes respectivement perpendiculaires à ces arêtes. Ce point peut se trouver soit dans l'intérieur, soit sur une face, soit hors de la pyramide.

435. On démontre que les quatre droites qui joignent deux à deux les milieux des arêtes non situées dans le même plan, passent par un seul et même point.

436. (*Fig.* 94.) Il existe cinq points, dont un intérieur et quatre extérieurs, également éloignés des faces du tétraèdre. Menez par les arêtes PQ, QR, RP, des plans qui divisent respectivement en deux parties égales les trois angles dièdres formés par

PQS, QRS, PRS, avec PRQ,

le point de rencontre de ces trois plans, situé dans l'intérieur de la pyramide, sera évidemment à égale distance des quatre faces.

On pourra faire la même construction sur les autres arêtes : on obtient donc encore six plans qui passent par le même point.

Si on mène par les arêtes PQ, QR, RP, des plans qui divisent en deux parties égales les

angles adjacens aux angles dièdres internes, leur intersection commune donnera un second point situé hors de la pyramide, et qui sera également éloigné des quatre faces. On peut faire une construction analogue sur chaque face; ce qui fournit quatre points extérieurs.

Polyèdres symétriques.

437. (*Figure* 94 *a.*) SPQR étant un tétraèdre, soit S′ le point symétrique du sommet S, par rapport à la base PQR, de sorte que SO = OS′, O étant la projection de S et de S′ sur la base, le tétraèdre qui a pour sommets les quatre points S′, P, Q, R est symétrique au premier. Les arêtes, les angles plans, les angles dièdres sont égaux; mais on ne peut pas superposer les deux solides (p. 411).

(*Fig.* 94 *a.*) Toutefois, si la base PQR est isocèle, si l'on a PQ = QR, et si l'arête SQ est perpendiculaire à la base, de sorte que O tombe en Q, alors la pyramide symétrique S′PQR est évidemment égale et superposable à la pyramide SPQR.

(*Fig.* 94 *a.*) Si les trois arêtes SP, SQ, SR sont égales, le point O étant alors le centre du cercle circonscrit à PQR, les rayons OP, OQ, OR sont égaux: d'où, d'après ce qui précède, les pyramides SOPQ, SOQR, SOPR sont respectivement égales et superposables à leurs pyramides symétriques S′OPQ, S′OQR, S′OPR.

Ainsi, dans ce cas, quoique les pyramides totales SOPQ, S′OPQ ne puissent se superposer, on peut les décomposer chacune en trois pyramides partielles, qui sont superposables.

438. (*Fig.* 95.) Plaçons maintenant le tétraèdre SPQR dans une position quelconque par rapport au plan de symétrie MN, la pyramide symétrique P′Q′R′S′ aura ses arêtes, ses angles plans, ses angles dièdres égaux à ceux qui lui correspondent dans la pyramide PQRS; mais les parties égales ne sont pas disposées de la même manière : cette pyramide symétrique sera égale, avec superposition, à la pyramide symétrique de la *figure* 94.

439. (*Fig.* 95.) Le milieu de l'arête PS étant symétrique au milieu de l'arête P′S′, les plans qui passent par ces milieux perpendiculairement aux arêtes sont aussi symétriques; il en est de même pour une autre arête : donc le point I de rencontre de ces plans dans la pyramide PQRS sera symétrique au point I′ de rencontre dans la pyramide P′, Q′, R′, S′ (385), et le point I sera également éloigné des quatres sommets P, Q, R, S, et le point I′ des quatre sommets P′, Q′, R′, S′. La pyramide PQRS peut être décomposée dans les quatre pyramides IQRP, IQPS, IRPS, IQRS, ayant chacune trois faces isocèles; la pyramide P′Q′R′S′ peut se décomposer dans les quatre pyramides symétriques analogues et aussi à faces isocèles : donc (437) deux pyramides symétriques quelconques peuvent se décomposer chacune en neuf pyramides égales chacune à chacune et superposables.

Lorsque le point I tombe hors de la pyramide, la pyramide totale est égale à la somme de trois pyramides partielles, moins la quatrième; la même décomposition ayant lieu dans les deux pyramides, les conclusions du n° 437 restent les mêmes.

440. (*Fig.* 95.) Si les quatre points R, P, Q, S sont dans un même plan, leurs symétriques R′, P′, Q′, S′ sont aussi dans un même plan; car l'on a angle

$$P'S'Q' = PSQ,$$
$$P'S'R' = PSR,$$
$$R'S'Q' = RSQ,$$

Or, $PSQ = PSR + RSP$:

donc aussi $P'S'Q' = P'S'R' + R'S'P'$.

Les trois droites S′P′, S′R′, S′Q′ sont donc dans un même plan; car si elles étaient les côtés d'un angle solide, on aurait

$$P'S'Q' < P'S'R' + R'S'P' \ (414).$$

Par conséquent, étant donnés tant de points qu'on voudra situés dans un même plan, leurs symétriques sont aussi dans un même plan. En effet, soient A, B, C, D, E des points situés dans un même plan, et A′, B′, C′, D′, E′ leurs symétriques, d'après ce qui précède, A′, B′, C′, D′ sont dans un même plan; il en est de même des points B′, C′, D′, E′; mais ces deux plans ont en commun les trois points B′, C′, D′, donc ils ne font qu'un seul et même plan, et ainsi de suite.

441. (*Fig.* 96.) Les pyramides S′A′B′C′D′, SABCD, dont les sommets sont symétriques, ont leurs faces égales chacune à chacune, également inclinées, mais non également disposées. En effet, puisque les points A, B, C, D, E sont dans un même plan, les symétriques sont aussi les sommets d'un polygone plan A′B′C′D′E′ (440). Les pyramides triangulaires S′B′C′D′, SBCD étant symétriques, leurs faces sont égales et également inclinées: donc l'inclinaison de S′B′C′ sur S′B′D′ est égale à celle de SBC sur SBD. Les pyramides S′A′B′D′ et SABD étant symétriques, l'inclinaison de S′B′D′

sur S′B′A′ est égale à celle de SBD sur SBA : donc l'inclinaison de S′B′C′ sur S′B′A′ est égale à celle de SBC sur SBA, et ainsi de suite.

On prouve comme en 439 que les deux pyramides peuvent se décomposer en un même nombre de pyramides à faces isocèles, égales chacune à chacune.

442. Deux *polyèdres* sont *symétriques* lorsqu'ils peuvent être placés dans une position telle, que leurs sommets soient symétriques par rapport à un même plan.

443. Deux polyèdres symétriques ont des faces homologues égales chacune à chacune, et également inclinées. Supposons les deux polyèdres placés dans la position où leurs sommets sont symétriques par rapport à un plan de symétrie ; prenez un point quelconque dans l'intérieur du premier polyèdre, et son symétrique dans l'intérieur du second ; chacun de ces polyèdres peut être décomposé en autant de pyramides qu'il a de faces, ayant chacune pour sommet le point pris dans son intérieur : toutes ces pyramides sont symétriques respectivement : donc leurs faces homologues sont égales (441) ; or, les bases de ces pyramides sont les faces des polyèdres : donc ces faces sont égales.

On démontre comme en 441 que les faces sont également inclinées, etc.

444. Les deux polyèdres symétriques, quoique ne pouvant, généralement parlant, se superposer, peuvent être décomposés en un certain nombre de pyramides triangulaires superposables.

Polyèdres semblables.

445. (*Fig.* 97). Deux *tétraèdres* ABCD, a, b, c, d sont *semblables*, lorsqu'ils ont deux faces ABC, ABD semblables aux faces abc, abd, également inclinées et semblablement placées.

Ainsi deux tétraèdres symétriques ne sont pas semblables.

446. On conclut de cette définition que deux tétraèdres semblables ont toutes leurs faces homologues semblables, également inclinées, semblablement placées, et les angles solides homologues égaux.

Les triangles ABC, abc étant semblables, ainsi que les triangles ABD, abd,

l'on a angle ABC = angle abc

angle ABD = angle abd.

Donc l'angle solide B est égal à l'angle solide b; car ces deux angles solides sont formés par deux angles plans égaux et également inclinés : donc angle CBD = angle cbd; mais les mêmes triangles semblables fournissent aussi la proportion

$$AB : ab :: CB : cb$$

$$AB : ab :: CD : cd;$$

d'où
$$CB : cb :: CD : cd.$$

Les deux triangles CBD, cbd, sont donc semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

On démontre de la même manière la similitude des faces ACD, acd: donc l'angle solide D est égal à l'angle solide d, et l'angle solide A à l'angle solide a.

447. Deux tétraèdres qui ont trois faces semblables, chacune à chacune, et sembla-

blement disposées, sont semblables ; car les triangles ABC, ABD, CBD étant respectivement semblables aux triangles *a b c, a b d, c b d,* les triangles qui forment l'angle solide *b* sont égaux aux trois angles plans que forment l'angle solide *b* ; donc ces plans sont également inclinés, etc.

448. Dans deux tétraèdres semblables, on nomme *arêtes homologues*, celles qui réunissent des sommets d'angles solides égaux : ces arêtes sont proportionnelles, et réciproquement, deux pyramides triangulaires sont semblables, lorsqu'elles ont les côtés homologues proportionnels.

Les hauteurs abaissées des sommets homologues sont proportionnelles aux arêtes.

Les arêtes homologues forment des angles égaux avec les faces homologues.

449. Deux tétraèdres semblables peuvent être placés de manière que deux faces homologues aient leurs arêtes homologues parallèles, et alors les deux autres faces sont aussi parallèles ; dans cette position, les quatre droites qui joignent les sommets homologues se réunissent en un point qu'on nomme *centre de similitude*, et tout plan qui passe par le centre de similitude retranche deux tétraèdres semblables.

450. Deux *polyèdres* sont *semblables*, lorsque les sommets homologues sont déterminés par des tétraèdres semblables et semblablement placés.

Soient (*fig.* 98) A, B, C, D, quatre sommets d'un polyèdre, *a*, *b*, *c*, *d*, les quatre sommets homologues d'un polyèdre semblable ; EFG, *e*, *f*, *g*, étant des triangles sem-

blables, il faut que les pyramides AEFG, *aefg*, BEFG, *defg*, CEFG, *cefg*, soient respectivement semblables; les points A, *a*, B, *b*, sont homologues; et l'on nomme *arêtes homologues* et *diagonales homologues*, les droites qui réunissent deux sommets homologues.

Deux polyèdres symétriques ne sont pas semblables, généralement parlant.

451. (*Fig.* 98.) Dans deux polyèdres semblables, 1° les arêtes et les diagonales homologues sont proportionnelles; 2° les faces homologues sont semblables; 3° les angles dièdres homologues sont égaux; 4° les angles solides sont égaux; 5° les arêtes homologues sont également inclinées sur des faces homologues.

En effet, les inclinaisons de AFG et de DFG sur EFG sont égales aux inclinaisons de *afg* et de *dfg* sur *efg*: donc l'angle dièdre, formé par AFG et DFG, est égal à celui que forment les plans *afg* et *dfg*; par conséquent les tétraèdres AGFD, *agfd*, sont semblables, comme étant formés par deux triangles semblables et également inclinés: on a donc

$$AD : ad :: FG : fg;$$

on aura de même $BD : bd :: FG : fg;$

donc $AD : ad :: BD : bd ::$

$$BC : bc :: AB : ab:$$

Donc les arêtes et les diagonales homologues sont proportionnelles.

Les triangles ABD, ABC, BCD, sont respectivement semblables aux triangles *abd*, *abc*, *bcd*: donc si les sommets A, B, C, D, sont dans un même plan, on prouve, comme au numéro 440, que les quatre sommets homologues *a*, *b*, *c*, *d*, sont aussi dans un même plan; donc les faces homologues sont

semblables, puisqu'elles sont formées d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés ; soit AB une arête commune à deux faces voisines ABC, ABD ; le tétraèdre formé par ABCD sera semblable au tétraèdre homologue formé par *a b c d*, puisque leurs faces sont semblables : donc l'inclinaison de ABC sur ABD est égale à celle de *a b c* sur *a b d*, etc. On peut donc aussi, par des sections homologues, décomposer les deux polyèdres en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune.

452. Deux polyèdres semblables peuvent toujours être placés de manière que toutes les faces homologues deviennent parallèles : dans cette position, les droites qui joignent les sommets homologues se réunissent en un même point, nommé *centre de similitude*.

Toute droite menée par ce point est coupée proportionnellement.

Il est facile de démontrer que, lorsque trois polyèdres semblables sont placés dans la position parallèle, les trois centres de similitude qu'on obtient en les comparant deux à deux, sont placés sur la même droite.

Polyèdres ; Prismes.

453. (*Fig.* 99.) Le *prisme* est un polyèdre engendré par le mouvement d'une droite AA′, qui reste toujours parallèle à elle-même et qui est assujettie à suivre le contour d'un polygone donné ABCDEF ; il est évident que tous les points de la droite mobile décrivent des polygones égaux et parallèles à celui qui dirige le mouvement ; on nomme *base du prisme*, les deux polygones ABCDEF.

A'B'C'D'E'F' qui le terminent; les autres faces ABA'B', BCB'C', etc., sont des parallélogrammes. La *hauteur du prisme*, c'est la distance des deux bases; elle est, généralement parlant, plus petite que l'arête AA'.

Un prisme est donc entièrement déterminé lorsqu'on connaît, 1° la base; 2° une arête AA', de longueur et de direction.

Le *prisme* est *triangulaire*, lorsque la base est un triangle; *quadrangulaire*, lorsque la base est quadrilatère.

454. Le *prisme* est *droit*, lorsque l'arête est perpendiculaire à la base : dans ce cas, la hauteur est égale à l'arête.

455. (*Fig.* 100.) Un *parallélipipède* est un prisme qui a pour base un parallélogramme. Dans ce cas, le prisme est entièrement formé de parallélogrammes; et on peut considérer comme bases deux faces opposées quelconques. Le *parallélipipède* est *droit*, lorsque l'arête AA' est perpendiculaire à la base; il est *rectangle*, lorsqu'étant droit, il a en même temps un rectangle pour base : ainsi, toutes les faces d'un parallélipipède rectangle sont des rectangles.

(*Fig.* 101 *bis.*) Un *cube* est le parallélipipède rectangle qui a pour base un carré, et dont la hauteur AA' est égale au côté du carré : ainsi, les six faces du cube sont des carrés égaux.

456. Tout plan mené parallèlement à la base d'un prisme y fait une section égale à la base.

Tout plan mené parallèlement à une arête coupe le prisme, suivant un parallélogramme dont deux côtés sont parallèles à l'arête.

457. (*Fig.* 100.) Le plan diagonal BDB'D' divise le parallélipipède en deux prismes triangulaires ABDA'B'D', BCDB'C'D', qui sont symétriques l'un de l'autre. En effet, prolongeons les trois arêtes de l'angle solide A, et faisons AB'' = AB, AD'' = AD, AA''' = AA'; et, construisant le prisme triangulaire AD''B''A'''D'''B''', il sera symétrique au prisme triangulaire qui a pour base ABD (411); et il est évidemment égal à celui qui a pour base BDC : donc ces deux prismes sont symétriques.

Aires des polyèdres.

458. *L'aire d'un polyèdre*, c'est la somme des aires de ses faces; ainsi cette évaluation n'est sujette à aucune difficulté; toutefois, dans quelques cas particuliers, on obtient cette aire plus facilement que par cette méthode générale.

459. L'aire d'un prisme, les bases non comprises, ou, ce qui revient au même, la *surface convexe d'un prisme*, est égale au périmètre de la section faite perpendiculairement à une arête, multiplié par cette arête.

Et la surface convexe d'un prisme droit est égal au périmètre de la base multiplié par la hauteur.

L'aire d'une pyramide regulière, la base non comprise, est égale au périmètre de la base, multiplié par la demi-hauteur d'une des faces.

Volumes des polyèdres,

460. On appelle *mètre cube* le cube dont le côté est égal au mètre; on le nomme aussi

unité de volume : cette dénomination convient en général au cube qui a pour côté l'unité linéaire.

Le *volume d'un solide*, c'est le nombre qui exprime combien de fois le mètre cube, ou en général, combien de fois l'unité de volume est renfermée dans ce solide ; c'est ce qu'on nomme aussi *la solidité* d'un solide.

Solides équivalens.

461. Deux *solides* sont *équivalens*, lorsqu'ils ont le même volume ou la même solidité. Il est évident que deux solides égaux sont toujours équivalens ; mais la réciproque n'a pas lieu.

462. Deux polyèdres symétriques sont équivalens, car on peut les décomposer chacun en un même nombre de pyramides égales, chacune à chacune (444).

463. (*Fig.* 100.) Le plan diagonal BDB'D' partage le parallélipipède en deux prismes triangulaires équivalens, car ils sont symétriques (457) : donc, chaque prisme est la moitié du parallépipède.

464. (*Fig.* 101.) Si deux parallélipipèdes AF, AL, ont la même base ABCD, et les bases supérieures EFGA, KLMN, renfermées entre les mêmes parallèles EFKL, GHMN, ils sont équivalens ; car les faces BDFH, BDLN, sont égales et parallèles aux faces ACEG, ACKM ; donc les prismes triangulaires ACEGKM, BDFHLN, sont égaux ; et ôtant du prisme trapézoïdal ACBDEGLN le premier prisme triangulaire, il reste le parallélipipède AF ; ôtant du même prisme trapézoï-

dal le deuxième prisme triangulaire, il reste le parallélipipède AL : donc ces restes sont équivalens.

Les mêmes raisonnemens amènent aux mêmes conclusions lorsque KM se confond avec FH, ou bien tombe entre FH et GE.

465. (*Fig.* 102.) Si deux parallélipipèdes CF, CL, ont même base ABCD et même hauteur, ils sont équivalens; puisqu'ils ont même hauteur, les bases supérieures EFGH, KLMN, sont donc sur un même plan : prolongeant les côtés KM, EF, LN, GH, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, on formera le parallélogramme IPQR, qu'on peut considérer comme la base supérieure d'un parallélipipède qui aurait ABCD pour base inférieure; or, d'après ce qui précède (464), ce solide est équivalent au parallélipipède CF et au parallélipipède CL : ces deux solides sont donc équivalens.

466. Problème XCVI. Etant donné un parallélipipède oblique ABCDMNLK, construire un parallélipipède droit équivalent.

Solution (*Fig.* 102). Aux points A, B, C, D, de la base inférieure, élevez des perpendiculaires à cette base, qui rencontreront le plan de la base supérieure en quatre points E, F, G, H; le parallélipipède droit ABCDEFGH, sera le parallélipipède demandé, car il est droit, et ayant même base et même hauteur que le prisme oblique, il est équivalent à ce prisme (465).

467. Problème XCVII. (*Fig.* 102 *bis.*) Etant donné le parallélipipède droit AG, construire un parallélipipède rectangle équivalent, et de base équivalente.

Solution. Des points A, D, abaissez sur BC les perpendiculaires DR, AV, la figure DRAV sera un rectangle équivalent à la base ABCD; des points E, H, abaissez sur FG les perpendiculaires HT, ES, la figure EHTS sera aussi un rectangle égal au premier : on peut donc les considérer comme les deux bases d'un parallélipipède rectangle ; or, les deux parallélipipèdes AT, AG ont la face ADEH en commun ; et prenant cette face pour base, ils ont aussi même hauteur : donc ils sont équivalens. c. q. f. t.

468. PROBLÈME XCVIII. Etant donné un parallélipipède oblique, construire un parallélipipède rectangle équivalent?

Solution. On construit d'abord un parallélipipède droit équivalent (466), et ensuite un parallélipipède rectangle droit équivalent à celui-ci (467).

MESURE DES SOLIDITÉS DES POLYÈDRES.

Prisme.

469. Les trois arêtes adjacentes d'un parallélipipède se nomment les *dimensions du parallélipipède.*

470. (*Fig.* 103.) Deux parallélipipèdes rectangles AM, AG, de même base ABCD, sont entre eux comme leurs hauteurs AK, AE. Pour fixer les idées, supposons que l'on ait AK : AE : : 3 : 8 ; divisez AE en 8 parties égales; AK en comprendra 3; et par les points de division, faisant passer des plans parallèles à la base ABCD, le grand parallélipipède sera par-

tagé en 8 parallélipipèdes égaux, dont le petit parallélipipède n'en contiendra que 3 : ainsi les solidités des deux parallélipipèdes sont entre elles comme 8 est à 3, ou comme la hauteur AE est à la hauteur AK; car ce raisonnement subsiste toujours tant qu'il existe un rapport numérique entre les deux hauteurs; lorsque ce rapport est incommensurable, et pas numériquement exprimable, la même conclusion a encore lieu; on aura recours aux moyens de démonstration développés (141) : donc, lorsque deux parallélipipèdes rectangles ont deux dimensions en commun, leurs solidités sont entre elles comme leurs troisièmes dimensions.

471. Deux parallélipipèdes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

Soit H la hauteur commune de deux parallélipipèdes X et Y;

M, N les côtés de la base du parallélipipède X;

P, Q les côtés de la base du parallélipipède Y.

Avec les arêtes H, P, N, formons un troisième parallélipipède rectangle Z.

Z et X ont en commun la base $H \times N$: on a donc $Z : X :: P : M$.

Y et Z ont en commun la base $H \times P$: donc $Y : Z :: Q : N$.

Multipliant entre elles ces deux proportions, il vient $Y : X :: P \times Q : M \times N$; or $P \times Q$ et $M \times N$ sont les aires des bases; donc aussi on aura cette proportion; le nombre de mètres cubes du premier solide est au nombre de mètres cubes contenus dans le deuxième solide, comme le nombre de mètres carrés contenus dans la première base, est au nombre de mètres

carrés contenus dans la deuxième base. Ainsi, lorsque deux parallélipipèdes rectangles ont une dimension en commun, ils sont entre eux comme les produits des deux autres dimensions.

472. Deux parallélipipèdes rectangles X et Y sont entre eux comme les produits des trois dimensions.

Soient H, P, Q les trois dimensions de X;
H′, P′, Q′ les trois dimensions de Y.

Imaginons un troisième parallélipipède Z, ayant pour dimensions H, P′, G; G étant une ligne quelconque, on aura (471)

$$X : Z :: P \times Q : P' \times G$$
$$Z : Y :: H \times G : H' \times Q';$$

$$\text{donc } X : Y :: P \times Q \times H : P' \times Q' \times H' ::$$
$$:: \frac{P}{P'} \times \frac{Q}{Q'} \times \frac{H}{H'} : 1.$$

Ainsi, la solidité du premier parallélipipède rectangle est à la solidité du deuxième parallélipipède rectangle, comme le produit des rapports des trois dimensions est à l'unité.

473. Les dimensions d'un mètre cube sont chacune d'un mètre : pour savoir donc combien de fois le mètre cube est contenu dans un parallépipède rectangle, il faut chercher combien de fois le mètre est contenu dans chaque dimension du parallélipipède, c'est-à-dire mesurer chaque dimension, et multiplier les résultats de ces mesures ensemble ; c'est ce qu'on exprime en disant que la *solidité d'un parallélipipède rectangle est égale au produit de ses trois dimensions.*

Exemple. Soit un parallélipipède rectangle ayant pour ses trois dimensions 32^{m}, 16^{m},

$12^{m},5$; la solidité de ce parallélipipède sera égale à $32 \times 19 \times 12^{m},5 = 6400^{m\,m\,m}$; ainsi ce parallélipipède rectangle contiendra 6400 fois le mètre cube ou le stère.

474. La solidité d'un parallélipipède quelconque est égale à l'aire de sa base, multipliée par sa hauteur; car ce parallélipipède est équivalent à un parallélipipède rectangle de base équivalente et de même hauteur: donc, etc.

On voit donc que la solidité d'un parallélipipède n'est égale au produit de ses trois dimensions que lorsqu'il est rectangle; dans tout autre cas il est plus petit.

475. La solidité d'un prisme triangulaire est égale au produit de l'aire de la base par la hauteur; car ce prisme est la moitié d'un parallélipipède de même hauteur et de base double (463): donc, etc.

476. La solidité d'un prisme polygonal quelconque est égale à l'aire de sa base, multipliée par sa hauteur; car on peut décomposer le prisme polygonal en autant de prismes triangulaires de même hauteur, qu'on peut former de triangles dans la base: donc, etc.

Solidités des pyramides.

477. (*Fig.* 104.) Si on coupe une pyramide triangulaire SDEF par un plan ABC parallèle à la base, et qu'on ôte la pyramide SABC, le solide restant ABCDEF se nomme *pyramide tronquée*; ABC, DEF en sont les deux bases, et leur distance en est la hauteur.

478. (*Fig.* 104.) Dans une pyramide tron-

quée, les aires des deux bases sont entre elles comme les carrés des hauteurs SO, SI des deux pyramides; car les triangles ABC, DEF étant semblables, l'on a

$$ABB : DEF :: AB^2 : DE^2 :: SA^2 : SD^2 :: \\ :: SO^2 : SI^2.$$

479. La solidité du tronc de pyramide ABCDEF, est plus grande que l'aire de la base supérieure, et plus petite que l'aire de la base inférieure multipliées chacune par la hauteur du tronc. En effet, portant AC de D en M, et AB de D en L, le triangle DLM sera égal et parallèle au triangle ABC, et le prisme triangulaire ABCDLM est évidemment plus petit que le tronc; or, la solidité du prisme est égale à la base ABC multipliée par la hauteur : donc, etc.

Prolongeant AC et AF jusqu'à ce qu'on ait AV = DF, AK = DE, le triangle AKV sera égal et parallèle au triangle DEF, et le prisme triangulaire AKVDEF est plus grand que le tronc; or, la solidité de ce prisme est égale à la base DEF par la hauteur du tronc; donc, etc. c. q. f. t.

On démontrera de même que la solidité d'une pyramide entière est plus petite que l'aire de la base multipliée par la hauteur.

480. (*Fig.* 105.) Soit SABC une pyramide triangulaire, B sa base, et H sa hauteur; supposons qu'on divise cette hauteur en un nombre n de parties égales; et soit h la grandeur d'une de ces parties; si par ces points de division on mène des plans parallèles à la base, la pyramide sera décomposée en troncs de pyramides, ayant chacune pour hauteur h, et il y a de plus une dernière pyramide de même

hauteur h; soient $B, B^{I}, B^{II}, B^{III}, B^{IV}, B^{V}$ les bases de ces troncs à partir d'en bas ; d'après ce qui précède, la solidité de la pyramide sera plus petite que $Bh + B^{I}h + B^{II}h + B^{III}h$, etc., et plus grande que $B^{I}h + B^{II}h + B^{III}h$, etc., de sorte que cette solidité est comprise entre

$$h(B + B_{I} + B^{II} + B^{III} + B^{IV} + B^{V})$$

et $$h(B^{I} + B^{II} + B^{III} + B^{IV} + B^{V})$$

La différence entre ces deux limites est hB; or, plus n sera grand, et plus h, et par conséquent hB sera petit : donc la différence entre les deux limites peut devenir plus petite qu'aucune quantité assignable. Supposons maintenant une seconde pyramide de même hauteur H que la première, et ayant une base b équivalente à la base B ; si on divise cette hauteur en un même nombre n de parties égales, la solidité de cette deuxième pyramide sera comprise entre

$$h(b + b_{I} + b^{II} + b^{III} + b^{IV} + b^{V}).$$

et $$h(b_{I} + b^{II} + b^{III} + b^{IV} + b^{V}).$$

Mais les bases B, B', B'' décroissent comme les carrés des hauteurs des pyramides (478), et les bases b, b', b'' décroissent suivant les mêmes rapports ; or, l'on a par supposition, $b = B$: donc aussi $b' = B'$, $b'' = B''$, $b''' = B'''$; et les solidités des deux pyramides sont donc renfermées entre les mêmes limites, dont la différence peut devenir moindre qu'aucune quantité donnée, d'où l'on conclut, d'après le principe énoncé au n° 143, que deux pyramides de même hauteur et de base équivalente, sont équivalentes ; par conséquent, si, par le sommet d'une pyramide, on mène un plan parallèle à la base, toutes les pyramides

qui auront même base, et leurs sommets sur ce plan, sont équivalentes.

On peut démontrer d'une manière analogue les propositions suivantes très-générales et très-fécondes dues à Cavallieri.

1° Si en coupant deux solides par une suite de plans parallèles on obtient des sections dont les aires correspondantes sont toujours dans le même rapport, les volumes compris entre deux de ces plans sont dans le même rapport.

2° Si en coupant un solide et une surface plane fermée par une suite de plans parallèles, on obtient des sections telles, que l'aire de l'une soit à la longueur correspondante de l'autre dans un rapport constant, le volume du solide et l'aire de la surface, compris entre deux de ces plans parallèles, sont dans le même rapport.

3° Si en coupant par une suite de plans parallèles deux aires planes fermées, on obtient des sections dont les longueurs sont dans un rapport constant; les aires des surfaces, comprises entre deux de ces plans, sont dans le même rapport.

La proposition cesse d'être vraie pour les surfaces courbes. (Note 15.)

481. (*Fig.* 106.) La solidité de la pyramide triangulaire SABC est égale à sa base, multipliée par le tiers de sa hauteur. En effet, au sommet S, imaginons le triangle SDE, égal et parallèle au triangle ABC; le solide SDEABC est un prisme triangulaire; or, le prisme est égal à cette pyramide, plus la pyramide quadrangulaire qui a pour sommet S', et pour base ACDE; le plan diagonal SDC partage cette pyramide en deux pyramides triangu-

laires SBCE et SDAC ; mais la droite SB étant parallèle au plan DAC, la pyramide qui a son sommet en B, et pour base DAC, est équivalente à celle qui a son sommet en S, et qui a même base (480) : donc le prisme est égal aux trois pyramides triangulaires SABC, SEDC, BDAC ; or, les bases ABC, DSE de ces pyramides sont égales, et elles ont même hauteur : donc ces pyramides ont même solidité, et chacune est le tiers du prisme ; mais la solidité du prisme est égale à sa base ABC, multipliée par sa hauteur, qui est aussi celle de la pyramide SABC : donc la solidité de celle-ci est égale à sa base multipliée par le tiers de sa hauteur.

482. La solidité d'une pyramide polygonale est égale à sa base, multipliée par le tiers de sa hauteur; car on peut décomposer cette pyramide en autant de pyramides triangulaires de même hauteur, qu'on peut former de triangles dans sa base : donc, etc.

Les solidités des deux pyramides sont entre elles comme les produits des bases par les hauteurs.

La solidité d'une pyramide est aussi égale à l'aire de la base multipliée par le tiers d'une droite quelconque, menée du sommet à la base, et par le sinus d'inclinaison de cette droite sur la base.

Cette même expression est celle du volume d'un solide quelconque, lorsque les aires des tranches parallèles croissent comme les carrés des distances à un point fixe pris sur le solide (480).

483. Pour trouver la solidité d'un polyèdre, on prend un point dans son intérieur ; par ce

point et par les arêtes, menant des plans, on partagera le polyèdre en autant de pyramides qu'il a de faces; la somme des solidités de ces pyramides donnera la solidité du polyèdre; mais il y a certains polyèdres dont la solidité se détermine d'une manière plus abrégée.

484. (*Fig.* 107.) La solidité de la pyramide triangulaire tronquée ABCDEF, est égale à la somme des solidités des trois pyramides, ayant pour hauteur celle du tronc, et pour bases, celles du tronc et une moyenne proportionnelle entre elles. En effet, menant le plan BDEF, on peut détacher du tronc la pyramide BDEF, c'est la première pyramide; il reste la pyramide trapézoïdale BDACF; on la décompose, en menant le plan diagonal BFA en deux pyramides triangulaires BACF et BADF; BACF est la seconde pyramide. Menons par le sommet B dans le plan ABD une droite parallèle à la base ADF de la troisième pyramide, alors cette pyramide est équivalente à celle qui aurait son sommet en K, et pour base ADF, ou ce qui est la même chose, qui a son sommet en A, et pour base DKF; or, l'on a

$$\text{DEF} : \text{DKF} :: \text{DE} : \text{DK} :: \text{DE} : \text{AB} :: \text{DF} : \text{AF},$$

et les angles BAC, KDF étant égaux.

$$\text{aire DRF} : \text{aire ABC} :: \text{DR} \times \text{DF} : \text{AB} \times \text{AC} : \text{DF} :: \text{AC};$$

donc $\quad \text{DEF} : \text{DKF} :: \text{DKF} : \text{ABC}.$

Ainsi, DKF est une moyenne proportionnelle entre les deux bases: donc, si nous désignons par H la hauteur du tronc, par B sa base inférieure, par B′ sa base supérieure, et par S sa solidité, on aura

$$S = \frac{1}{3} H (B + B' + \sqrt{BB'}).$$

Exemple. Soit $B = 20^{mm}$
$B' = 5^{mm}$
$H = 6^{m}$;

on aura $S = \frac{6}{3} (20 + 5 + \sqrt{5 \cdot 20})$
$2 (25 + 10) = 2 \cdot 35 = 70^{mmm}$;

ainsi le tronc contiendra 70 mètres cubes.

485. La même expression convient aussi à une pyramide polygonale tronquée ; en effet, les bases étant semblables, menons par deux sommets homologues des diagonales, et par les diagonales homologues, des plans qui décomposeront le tronc polygonal en troncs triangulaires ; soient a, b, c, d, e les triangles de la base supérieure, et a', b', c', d', e' les triangles de la base inférieure, H la hauteur du tronc, S la solidité cherchée, on aura (484)

$$S = \frac{1}{3} H (a + b + c + d + e + \ldots + a' + b' + c' + d' + e' \ldots + \sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} + \sqrt{dd'}),$$

ou

$$S = \frac{1}{3} H (B + B' + \sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} + \sqrt{dd'}).$$

B et B' désignent les aires des bases ; mais l'on a

$$a : a' :: B : B' : \text{donc } a = a' \frac{B}{B'},$$

or $aa' = \frac{a'^2 B}{B'}$, et $\sqrt{aa'} = a' \sqrt{\frac{B}{B'}}$,

et de même $\sqrt{bb'} = b' \sqrt{\frac{B}{B'}}$:

donc $\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} \ldots =$

$$= \sqrt{\frac{B}{B'}} \cdot (a' + b' + c' \ldots) =$$

$$= \sqrt{\frac{B}{B'}} \cdot B' = \sqrt{BB'} :$$

donc $S = \frac{1}{3} H (B + B' + \sqrt{BB'})$.

Sur le tronc de pyramide polygonale.

Voici une manière plus courte de trouver sa solidité : imaginez une pyramide triangulaire, de base équivalente à celle de la pyramide polygonale et de même hauteur ; et placez les deux bases sur un même plan. Si l'on prolonge le plan de la petite base du tronc polygonal, il fera dans la pyramide triangulaire une section équivalente à la petite base, et enlèvera une petite pyramide triangulaire équivalente à la petite pyramide polygonale retranchée : donc, le volume du tronc triangulaire est équivalent à celui du tronc polygonal : donc, etc.

Cette même expression est celle d'un tronc d'un solide quelconque compris entre deux tranches parallèles, lorsque les aires des tranches croissent proportionnellement à leurs distances à un point fixe.

486. (*Fig.* 106.) Si le plan DSE n'est pas parallèle à la base BC, on obtient un *prisme tronqué* ABCDSE ; on le décompose comme au numéro 481, en trois pyramides triangulaires SABC, DABC et SDCE. Cette dernière pyramide est équivalente à la pyramide BDCE, car elles ont même base DCE, et les sommets

S, B sont sur une droite parallèle à la base (480); la pyramide BCDE est équivalente à la pyramide AECB. Elles ont même base ECB; et leurs sommets D et A sont sur une droite parallèle à cette base: donc la solidité du prisme tronqué est équivalente à la somme des trois pyramides, ayant pour base celle du prisme et pour sommets ceux de la section. Désignons par H, H′, H″ les distances des trois sommets de la section à la base, et par B l'aire de cette base, et par S la solidité du prisme triangulaire tronqué, on aura

$$S = \frac{1}{3} B (H + H' + H'').$$

487. Lorsque le prisme est polygonal, on le décompose en prismes triangulaires, et on calcule à part la solidité de chaque prisme, ensuite on en fait la somme.

Solidités des polyèdres semblables.

488. Les solidités de deux pyramides triangulaires semblables sont entre elles comme les cubes des côtés homologues; car soient B, B′ les bases, H et H′ les hauteurs, S et S′ les solidités des deux pyramides, on aura

$$B : B' :: H^2 : H'^2 \ (478);$$
$$H : H' :: H : H'.$$

Multipliant ces deux proportions, il vient

$$BH : B'H' :: H^3 : H'^3.$$

Or, $S : S' :: BH : B'H'$ (482):

donc $S : S' :: H^3 : H'^3$.

Les deux solidités sont donc entre elles comme les cubes des hauteurs; mais les côtés homologues sont proportionnels aux hauteurs: donc.......

489. Les solidités de deux pyramides polygonales semblables sont entre elles comme les cubes des hauteurs ; car on peut décomposer les deux pyramides en un même nombre de pyramides triangulaires semblables, et en raisonnant comme au numéro 291, on démontre, etc.

490. Deux polyèdres semblables peuvent se décomposer en un même nombre de pyramides semblables (451) : donc les solidités de deux polyèdres semblables sont entre elles comme les cubes des côtés homologues.

Exemple. Soient deux polyèdres semblables A et A′, dont les côtés homologues sont comme 1 : 2 ; si on veut entourer les arêtes des deux polyèdres avec du fil, il faudra *deux* fois plus de longueur de fil pour A′ que pour A ; si on voulait couvrir de papier les surfaces des deux polyèdres, il en faudrait *quatre* fois plus pour A′ que pour A ; et A′ contient huit fois plus de mètres cubes que A, et pèse *huit* fois plus que A, si les deux sont de même matière.

Ainsi, dans deux polyèdres semblables, les périmètres ou les sommes des arêtes sont entre eux comme les côtés homologues ; les surfaces sont entre elles comme les carrés de ces côtés, et les solidités comme leurs cubes.

Toisé des solides.

491. Dans le système de mesures aujourd'hui en usage, l'unité du volume pour les solides est le mètre cube ou le stère ; mais pour mesurer la solidité des vases destinés à recevoir les

liquides ou les grains, ce qu'on appelle aussi leur *capacité*, on prend pour unité le litre ou le décimètre cube; c'est-à-dire un cube qui a un décimètre de côté; de sorte que le mètre cube contient mille litres. Pour les unités multiples, on se sert des trois dénominations tirées du grec, *déca*, *hecto*, *kilo*, et pour les subdivisions des trois dénominations latines, *deci*, *centi*, *milli*. Le calcul n'est sujet à aucune difficulté; il n'en est pas de même dans l'ancien système formé sur la toise: alors on était obligé, pour abréger les calculs, de recourir à diverses méthodes que nous allons faire connaître.

PREMIÈRE MÉTHODE.

Cuber par toises cubes et pieds cubes, etc.

492. Une toise cube est un cube qui a pour côté une toise; on l'écrit ainsi 1^{TTT}. Un pied cube est un cube qui a pour côté un pied; on l'écrit ainsi 1^{PPP}, et ainsi des autres divisions, et l'on a

$$1^{TTT} = 216^{PPP},$$
$$1^{PPP} = 1728^{ppp},$$
$$1^{ppp} = 1728^{lll},$$
$$1^{lll} = 1728^{pts\ pts\ pts}.$$

Supposons qu'on ait un parallélipipède ayant ces trois dimensions :

Longueur . . .	2^{T} .	4^{P} .	8^{p}	$= 200^{p}$.
Largeur	1^{T} .	3^{p}		$= 108^{p}$.
Hauteur	3^{T} .	5^{p} .	7^{p}	$= 283^{p}$.

Et réduisant tout en pouces, unités de la

plus petite espèce, on aura, pour la solidité cherchée,

$$S = 200 \times 108 \times 283 = 6112800^{ppp} =$$
$$= 3537^{PPP} + 864^{ppp} = 16^{TTT} . 81^{PPP} . 864^{ppp}.$$

DEUXIÈME MÉTHODE.

Toises cubes, toise-toise pied.

493. La toise-toise pied, ou 1^{TTP}, est un parallélipipède qui a une toise carrée de base et un pied de hauteur; la toise-toise pouce, ou, 1^{TTp}, et un parallélipipède qui a une toise carrée de base et un pouce de hauteur, et ainsi de suite. Cette explication suffit pour comprendre le tableau suivant:

$$1^{TTT} = 6^{TTP},$$
$$1^{TTP} = 12^{TTp} = 36^{PPP} = \tfrac{1}{6}^{TTT},$$
$$1^{TTp} = 12^{TTl} = 3^{PPP} = \tfrac{1}{12}^{TTP},$$
$$1^{TTl} = 12^{TTpts} = \tfrac{1}{4}^{PPP} = \tfrac{1}{12}^{TTp} = 432^{lll}.$$

Soit encore à évaluer le parallélipipède du numéro 492.

On multiplie la longueur par la largeur, en se servant des parties aliquotes, comme il a été expliqué (page 92), et on trouve

$$(2^{T} . 4^{P} . 8^{P})(1^{T} . 3^{P}) = 4^{TT} . 1^{TP} . 0^{Tp}.$$

On multiplie cette aire par la hauteur, et toujours en prenant des parties aliquotes. Conformément au tableau, on aura

$$S = 16^{TTT} . 2^{TTP} . 3^{TTp} . 2^{TTl}.$$

Pour réduire maintenant en pieds cubes, pouces cubes, il suffit de consulter encore le tableau; on obtient, comme ci-dessus,

$$16^{TTT} . 81^{PPP} . 864^{ppp}.$$

494. Dans l'architecture civile et militaire on se servait encore d'une troisième espèce d'unité, de la solive. On nommait ainsi un parallélipipède de trente-six pouces d'équarrissage et d'une toise de haut. Cette solive-toise se divise en six parties, ou pied de solive; parallélipipède de même équarrissage, et n'ayant qu'un pied de hauteur, et conservant toujours la base. Le pouce de solive a un pouce de hauteur, etc. Il est facile de voir comment on peut réduire les toises cubes, pieds cubes en solives, et réciproquement. Ces mesures ne sont plus en usage; nous n'entrons dans ces détails que pour donner des exercices de calcul et faire sentir l'immense avantage du système métrique décimal.

SURFACES COURBES DÉVELOPPABLES.

Cylindres et surfaces cylindriques.

495. (*Fig* 108.) Le cylindre ABLM est une surface engendrée par le mouvement d'une droite, qui reste toujours parallèle à elle-même, et qui est assujettie à suivre le contour ACMD d'un cercle. On voit que le cylindre a la même génération que le prisme (page 260); sa ligne *directrice* est un cercle, tous les points de la droite décrivent des cercles égaux et parallèles, et, par analogie, on nomme

Bases du cylindre, les cercles parallèles ACMD, BNLK qui terminent la surface;

Hauteur du cylindre, la distance des bases;

Côté du cylindre, la longueur AB de la droite génératrice.

496. Au lieu de prendre une circonférence pour *directrice* du mouvement, on peut prendre une autre courbe, telle qu'une ellipse, une parabole, etc., et on aurait un cylindre elliptique, parabolique, etc. On a donné à toutes ces surfaces, qui ont le même mode de génération, le nom de *surfaces cylindriques* : ainsi le cylindre est une surface cylindrique. Mais toute surface cylindrique n'est pas nécessairement un cylindre.

La droite mobile porte le nom de *ligne génératrice.*

C'est ainsi que l'axe de la terre, conservant presque toujours même direction dans l'espace, y décrit une surface sensiblement cylindrique et elliptique, car la *directrice* est l'ellipse que le centre de la terre décrit annuellement autour du soleil.

497. Tous les raisonnemens qu'on a faits pour les prismes peuvent aussi s'appliquer aux surfaces cylindriques, et on a déduit les conclusions suivantes :

1° En coupant une surface cylindrique par un plan parallèle à la base, la section est égale à cette base.

2° Si le plan coupant n'est pas parallèle à la base, on obtient une ligne, qu'on peut aussi considérer comme une directrice.

3° La surface convexe est égale au périmètre de la section perpendiculaire au côté multiplié par le côté.

4° La solidité d'un volume cylindrique est égale à l'aire de la base multipliée par la hauteur.

Soit donc un cylindre : désignons par

R, le rayon de la base;
H, la hauteur;
S, la solidité;
π, le rapport de la circonférence au diamètre.

On aura

$$S = \pi R^2 H.$$

498. Le *cylindre* est *droit* lorsque le côté est perpendiculaire à la base. Daus tout autre cas, il est oblique. Ainsi, en faisant tourner un parallélogramme rectangle autour d'un de ses côtés, celui qui est opposé au côté fixe décrit un cylindre droit ; les côtés adjacens décrivent les bases.

499. Soit un cylindre droit $R = 287^m$
$L = 100^m$ = hauteur

on aura

$$A = 2\pi . 287 . 100 = 1804 . 100 = 180400^{mm}$$
$$T = 180400 + 2 . 258870 = 698140^{mm}$$
$$S = 1294 3500^{mmm}.$$

A = surface convexe
T = surface totale.

500. Deux *surfaces* quelconques sont *semblables*, lorsqu'on peut les placer de manière à avoir un *centre de similitude*, c'est-à-dire un point tel que toutes les droites menées de ce point soient coupées proportionnellement par les deux surfaces : de là on conclut que,

1° Deux surfaces cylindrique sont semblables lorsqu'elles ont des bases semblables, et des côtés également inclinés sur les bases et proportionnels à des lignes homologues dans ces bases.

2° Deux cylindres sont semblables lorsque les rayons des bases sont entre eux comme les côtés également inclinés sur la base et sur le rayon.

3° Les aires totales et les aires convexes de deux cylindres semblables sont entre elles comme les carrés des rayons, des côtés ou des hauteurs.

4° Les solidités de deux cylindres semblables sont entre elles comme les cubes des rayons, des côtés ou des hauteurs.

Plan tangent.

501. (*Fig.* 108.) Si on coupe la surface cylindrique par un plan parallèle à la ligne génératrice, la section est un parallélogramme SROL; le côté SR est une sécante relativement à la ligne directrice ARDS; en menant une suite de plans parallèles, on parviendra à un plan qui rencontrera la base suivant la tangente DV; et les deux côtés RL, SO, se réunissent en un seul côté DK. Ce *plan* VDK est *tangent* à la surface; il n'a de commun avec elle que la génératrice DK: tous les autres points du plan sont situés hors de la surface. La droite DK est la *ligne de contact*; tous les points situés sur cette droite ont le même plan tangent. En effet, soit I un de ces points, menons un plan parallèle à la base: la section sera une courbe égale à cette base, et la tangente à cette section en I est parallèle à la tangente DV: donc les deux plans tangens passant par D et par I ne font qu'un seul et même plan.

502. Problème XCIX. Par un point donné

sur une surface cylindrique, mener un plan tangent à cette surface?

Solution. Par ce point passe nécessairement une génératrice; menez par ce point, mais non suivant la génératrice, un plan quelconque: il coupera la surface suivant une ligne; menez par le point donné une tangente à cette section: elle détermine, avec la génératrice, la position du plan tangent; car toute section faite dans une surface cylindrique peut être considérée comme une directrice (497).

Autre solution. Par le point donné, menez la génératrice, que vous prolongez jusqu'à ce qu'elle rencontre la base; menez par le point de rencontre une tangente à cette base: elle détermine, avec la génératrice, la position du plan tangent.

Si on mène un plan qui coupe le cylindre suivant une ligne courbe, et le plan tangent suivant une droite, celle-ci sera évidemment tangente à la courbe; car, si elle était sécante, le plan tangent serait aussi sécant; donc.....

503. Problème C. (*Figure* 108.) Par un point donné M, hors d'une surface cylindrique, mener un plan tangent à cette surface?

Solution. Menez MX parallèle à la génératrice; par le point X, où elle rencontre le plan de la base, menez une tangente à la circonférence de la base: le plan MXZ est le plan tangent demandé; il touche évidemment suivant la génératrice qui passe par Z.

504. Si la directrice est un cercle, une ellipse, etc., on pourra mener par le point X deux tangentes, et par conséquent par le point M deux plans tangens à la surface.

Si M est un point lumineux, la portion convexe du cylindre interceptée entre les deux plans tangens, est la partie éclairée, l'autre partie est dans l'ombre.

Si M est la position de l'œil d'un spectateur, la portion convexe interceptée est la partie vue, et l'autre partie n'est pas vue.

Développement du cylindre.

505. (*Fig.* 109.) Soit BAM une surface cylindrique, ou, pour fixer les idées, un cylindre droit, à laquelle on a mené le plan tangent KDRV, la droite de contact DK étant perpendiculaire sur le plan de la base, le plan tangent est aussi perpendiculaire à cette base; menons dans le plan tangent une suite de droites parallèles à celle de contact DK; supposons maintenant que DK restant fixe on plie le plan tangent pour l'appliquer sur la surface, la tangente DV s'enroulera autour de la base DMA, et les parallèles tracées dans le plan tangent se confondront successivement avec les génératrices du cylindre, de sorte que le plan s'enveloppera, par plicature et sans rupture, autour de la surface courbe, et réciproquement la surface du cylindre peut se développer sur une surface plane; on appelle *surfaces développables*, celles qui jouissent de cette propriété.

Comme dans toute surface cylindrique on peut faire une section perpendiculaire à la ligne génératrice, il s'ensuit qu'une surface cylindrique quelconque est développable. On peut encore se représenter le développement d'une autre manière, soit A_1, A_2, A_3, A_4, A_5,

des génératrices très-rapprochées qui se suivent sur la surface ; et B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, *les* plans tangens qui passent par ces génératrices, et qui, se coupant nécessairement suivant des droites parallèles à ces génératrices, forment un prisme circonscrit au cylindre ; plus les lignes A_1, A_2, A_3, seront rapprochées, et moins la surface prismatique différera de la surface cylindrique ; faisons tourner B′, autour de son intersection avec B_2, jusqu'à ce que les deux plans n'en forment plus qu'un seul plan C. Concevons que celui-ci tourne autour de l'intersection de B_2 avec B_3, jusqu'à ce qu'il ne fasse qu'un seul plan D avec B_3 ; on fera tourner D autour de l'intersection de B_3 avec B_4, et ainsi de suite. On voit que C est la réunion des plans B_1, B_2 ; que D est la réunion des plans B_1, B_2, B_3. Le dernier plan sera la réunion de toutes les faces prismatiques, elle ne diffère pas sensiblement de la surface cylindrique.

Les volets brisés aux fenêtres donnent une idée de ce genre de mouvement.

Les surfaces développables sont précieuses dans les arts, car on peut les exécuter à l'aide de feuilles planes. On en a de fréquens exemples devant les yeux : c'est ainsi que les tuyaux des poêles sont des surfaces cylindriques qu'on confectionne avec les feuilles planes de tôle.

Hélice cylindrique.

506. (*Fig.* 109.) Traçons, dans le plan tangent DR, une droite quelconque DU inclinée sur la tangente DV. Lorsque le plan s'appli-

quera sur la surface, la droite s'y enroulera également, et y trace une courbe nommée *hélice cylindrique*; prenant les arcs DP, DP′, DP″, etc., égaux aux longueurs DP, DP′, DP″ prises sur la tangente DV; et prenant sur les arêtes correspondantes du cylindre les parties PN, P′N′, P″N″, égales à PM, P′M′, etc., les points N, N′, N″, appartiendront à cette courbe. Lorsque la droite DV sera entièrement enroulée autour de la circonférence, alors V (*Fig.* 109) sera revenu en D, et l'on aura DU′ égale à VU; mais on peut prolonger la ligne DV et commencer un second enroulement, et la droite UX tracera sur le cylindre une seconde portion d'hélice UR′S′O′, égale et applicable à la première, et ainsi de suite. Chaque portion d'hélice se nomme *spire*, et la distance DU′, entre le commencement D et la fin U′ d'une spire, se nomme *hauteur* ou *pas de l'hélice*.

507. (*Fig.* 109.) Soient R le rayon du cylindre, H la hauteur DU ou VU de l'hélice, on aura

$$\text{DV} = \text{circonf. R} = 2\pi\text{R}$$

$$\text{tangente UDV} = \frac{\text{UV}}{\text{DV}} = \frac{\text{H}}{2\pi\text{R}};$$

UDV est l'angle constant que fait l'hélice avec le plan de la base; lorsque cette inclinaison est nulle, l'hélice devient une circonférence; lorsque cet angle est droit, l'hélice est une droite, de sorte que la droite et la circonférence sont les deux limites de l'hélice.

508. Problème CI. Par un point N″ sur l'hélice, menez une tangente à l'hélice.

Solution. Menez l'arête U″P″; par P″ où

cette arête rencontre la base, menez une tangente à la circonférence de la base; prenez sur cette tangente une longueur P″T″ égale à l'arc DPP′P″, si c'est la première spire; ou bien à cet arc augmenté d'une circonférence, si c'est la deuxième spire; de deux circonférences, si c'est la troisième spire; menez TU″: ce sera la tangente demandée, car T U″ sera la direction de la droite enveloppante DU.

On voit donc qu'en chaque point de l'hélice, la tangente fait le même angle avec la base, et aussi avec les arêtes du cylindre.

509. Une hélice est donc entièrement déterminée, quand on connaît l'angle d'inclinaison UDV; lorsque deux angles générateurs sont supplémens l'un de l'autre, on obtient deux hélices égales par symétrie, et qui, quoique de même longueur, ne pourront s'appliquer l'une sur l'autre; les deux hélices ne diffèrent qu'en ce que l'une tourne de droite à gauche, et l'autre de gauche à droite.

510. Problème CII. Par deux points D et U″ donnés sur un cylindre, faire passer une hélice?

Solution. Menez l'arête U″P″ et la tangente P″T″; si U″ doit être sur la première spire, prenez P″T égale à l'arc DP″, et menez TU″; l'angle U′T. P″ sera l'angle d'inclinaison cherchée; si U″ est sur la seconde spire, il faut augmenter T″P″ d'une longueur de circonférence. Ainsi, par deux points pris sur un cylindre, on peut faire passer une infinité d'hélices; le plus petit angle d'une hélice est celui qui a lieu lorsque les deux points sont sur une même spire, et alors l'arc d'hélice est le plus court de tous ceux qui passent par les

mêmes points, et, en général, le plus court chemin pour aller d'un point D à un autre N″, sur le cylindre, en restant sur sa surface, c'est la portion de première spire qui passe par ces deux points; car ce chemin étant développé, devient une droite DN″ (*fig.* 109), tandis que tout autre chemin étant développé, devient une courbe passant par les mêmes points D et N″ (*fig.* 109); or, la droite est plus courte que la courbe, etc.

Ainsi, l'hélice jouit sur le cylindre de la même propriété dont jouit la droite sur la surface plane; l'hélice, le cercle et la droite, ont encore la propriété en commun d'avoir toutes les parties de même longueur égales et applicables, avec cette différence que l'hélice admet aussi une égalité par symétrie.

510. On démontre qu'il est impossible de faire passer un plan par quatre points sur la même spire, quelque rapprochés que soient ces points; les courbes qui jouissent de cette propriété portent le nom de *courbes à double courbure* : ainsi, l'hélice est une courbe à double courbure.

Cônes et surfaces coniques.

511. (*Fig.* 110.) Le cône est une surface engendrée par une droite SA, passant constamment par le point S, et assujettie à suivre le contour du cercle AMNOP, qu'on nomme, par cette raison, *ligne directrice.* Le point fixe S se nomme *sommet* ou *centre du mouvement*; la droite mobile pouvant être indéfiniment prolongée des deux côtés du sommet, la surface qu'elle engendre se compose de

deux parties SAMNO, SA'M'N'O' réunis au point S; chacune de ces parties se nomme *nappe de la surface conique*; on les distingue par les épithètes de *supérieure* et *d'inférieure*, d'après leur position; chaque nappe s'étend à l'infini dans l'espace; lorsqu'on ne considère qu'une portion de nappe interceptée par le plan AMNOP, cette ligne d'intersection prend le nom de *base*, et la hauteur du cône est la perpendiculaire SQ abaissée du sommet S sur la base.

512. En général, une surface conique est engendrée par le mouvement d'une droite, qui passe constamment par un même point, et qui est assujettie à passer par une courbe quelconque qu'on nomme *directrice*.

On voit donc que le plan est une surface conique, dont la ligne directrice est une droite; la pyramide est une surface conique, dont la ligne directrice est un polygone.

513. (*Fig.* 111) Le *cône droit* est celui qui a pour base un cercle, dont le centre Q est le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet; les lignes telles que SA se nomment *côtés du cône*, et la perpendiculaire SQ est *l'axe* du cône: ainsi le cône droit peut être regardé comme engendré par l'hypothénuse SB d'un triangle rectangle SBQ, tournant autour du côté SQ de l'angle droit.

Aire du cône droit.

514. (*Fig.* 111.) En considérant la circonférence AMBA comme un polygone régulier d'une infinité de petits côtés, le cône devient une pyramide régulière dont l'aire est égale

à la moitié du côté, multipliée par la circonférence de la base (459); soit donc L la longueur du côté, R le rayon de la base, et A l'aire convexe du cône, on aura

$$A = 2\pi L R.$$

Cette proposition se démontre facilement par le principe des limites; pour abréger, nous avons adopté la forme mnémonique de ce principe; voir aussi la proposition 2 de la page 271.

515. Par le milieu I de SB, menons un plan parallèle à la base, on aura $IO = \frac{1}{2} BQ$, et par conséquent cir. $IO = \frac{1}{2}$ cir. BQ : donc, l'aire du cône est égale à son côté multiplié par la circonférence que décrit le milieu de ce côté (514).

516. Menons par I la perpendiculaire IV à SB; les triangles IOV, SBQ, ayant les côtés perpendiculaires (211), sont semblables : on a donc

$$SB : VI :: SQ : OI;$$

de là $\quad SB : 2\pi . VI :: SQ : 2\pi . OI;$

ou bien SB : circonf. VI :: SQ : circonf. OI;

donc SB $\times$ circonf. OI = SQ $\times$ circonf. VI.

Mais SB $\times$ circonf. OI est égale à l'aire du cône : donc cette aire est aussi égale à la hauteur SQ, multipliée par la circonférence qui a pour rayon la partie de la perpendiculaire élevée sur le milieu du côté, interceptée entre ce côté et l'axe.

517. (*Fig.* 112.) Si on coupe un cône par un plan COD parallèle à la base, et qu'on enlève le cône supérieur SDO, la partie qui reste se nomme *cône tronqué* ou *tronc de cône*.

518. Supposons un tronc de cône droit; menons BM perpendiculaire sur le côté SB,

et égal en longueur à la circonférence QB; après avoir mené SM, élevez en C la perpendiculaire CN, elle aura même longueur que la petite base CO; en effet, l'on a les proportions

$$OC : QB :: SC : SB$$
$$CN : BM :: SC : SB;$$

donc $OC : QB :: CN : BM$;

et $2\pi . OC : 2\pi . QB :: CN : BM$;

ou circ. OC : circ. QB :: CN : BM;

or BM = circ. BQ par construction : donc CN = circ. OC.

519. L'aire du triangle SBM est égale à $\frac{1}{2}$ SB × BM = $\frac{1}{2}$ SB . circ. BQ : donc l'aire du triangle SBM est équivalente à l'aire du cône SBC; de même l'aire du triangle SCN est équivalente à l'aire du cône SCD; il s'ensuit que l'aire du cône tronqué est égale à celle du trapèze CNBM, ou bien à $\frac{1}{2}$ CB (BM + CN) = CB (circ. BQ + circ. CO); donc, l'aire d'un cône tronqué, non compris les bases, est égale à la moitié du côté multiplié par la somme des deux circonférences, ou par le côté multiplié par la demi-somme des deux circonférences de ses bases.

520. (*Fig.* 112.) Si par le milieu I de CB, on mène IR perpendiculaire sur CB, et un plan parallèle à la base, on aura IR = circ. IT; or, l'aire du trapèze CNBM est égale à CB × IR (265); donc, l'aire du cône tronqué est égale au côté CB, multiplié par la circonférence IT, que décrit le milieu de ce côté.

521. Soit élevée la perpendiculaire IV sur CB, et abaissée la perpendiculaire CP; les triangles IVT, CPB ayant les côtés perpendi-

culaires, étant semblables, fournissent la proportion

$$CB : IV :: CP : IT\ ;$$

de là $CB : 2\pi . IV :: CP : 2\pi . IT$;
ou bien CB : circ. IV :: CP : circ. IT;
et $CB\times$circ. $IT = CP\times$circ. $IV = OQ\times$circ. IV.

L'aire du cône tronqué est donc encore égale à sa hauteur OQ, multipliée par la circonférence qui a pour rayon la partie de la perpendiculaire élevée sur le milieu du côté et interceptée entre ce côté et l'axe.

Aire du cône oblique.

522. On ne peut trouver une expression simple pour déterminer l'aire de la surface convexe du cône oblique; pour la pratique, il suffit de décomposer la circonférence en arcs assez petits pour qu'on puisse sensiblement les considérer comme des droites : alors la surface du cône s'évalue comme celle d'une pyramide qui n'est pas régulière (458) (Note 16).

Solidité du cône.

523. (*Fig.* 112.) En considérant le cône comme une pyramide d'une infinité de faces, on trouve de suite que la solidité du cône est égale à l'aire de sa base, multipliée par le tiers de sa hauteur (514).

524. Soit $BQ = R$, $SQ = H$, V le volume du cône SBE, on aura

$$V = \tfrac{1}{3} H . \pi R^2 = \tfrac{1}{3}\pi HR^2 = \tfrac{2}{3}\pi R . \tfrac{1}{2} HR\ ;$$

or circ. $IT = \pi R$;
et $\tfrac{1}{2} HR$ = aire du triangle SQB.

Donc la solidité du cône droit est égale à l'aire du triangle générateur, multiplié par les $\frac{2}{3}$ de la circonférence que décrit le milieu du côté.

Solidité du cône tronqué.

525. (*Fig.* 112.) La solidité du cône tronqué CDBE est égale à celle du cône SBE, moins celle du cône SDC ; la solidité du cône SBE est équivalente à celle d'une pyramide qui aurait même hauteur que le cône, et une base équivalente (482) ; si, à une distance du sommet de cette pyramide, égale à SO, on mène un plan parallèle à sa base, on obtient une section équivalente à l'aire du cercle CD : donc la solidité de la petite pyramide sera équivalente à celle du petit cône ; et, par conséquent, la solidité du tronc est égale à celle du tronc de pyramide ; soit donc

R le rayon BQ de la grande base,
r le rayon CO de la petite base,
H la hauteur OQ du tronc de cône,
S sa solidité ;

on aura $S = \frac{1}{3} H \pi (R^2 + r^2 + R r)$ (485).

Voir la première proposition de la page 271.

Cônes semblables.

526. Deux cônes droits sont semblables lorsque leurs rayons sont proportionnels aux hauteurs ; de cette définition l'on conclut, 1° que les aires des cônes semblables sont entre elles comme les carrés, soit des rayons, soit des

hauteurs, soit des côtés; 2° que les solidités sont entre elles comme les cubes de ces mêmes lignes; pour le démontrer, on fera les mêmes raisonnemens que pour les cylindres semblables (500).

Sections du cône par un plan; et plans tangens.

527. (*Fig* 113.) En coupant le cône SABCD par un plan parallèle à la base, la section A′B′C′D′ est une courbe semblable à cette base; car en menant par le sommet un plan SBD, il coupera le cône suivant les droites SB, SD, et les plans suivant les droites parallèles B′D′, BD : on a donc la proportion

$$BD : B'D' :: SB : SB' :: SC : SC';$$

par conséquent, le rapport de BD à B′D′ est constant, de quelque manière qu'on mène le plan coupant : donc les droites homologues sont proportionnelles dans ces courbes; elles sont donc semblables.

528. Si on conçoit que le plan SBD tourne autour de SD, jusqu'à ce que la ligne BD devienne tangente à la courbe ABCD, alors le plan passant par l'arête SD, et par la tangente V′DV, sera tangent au cône; on le démontre comme au n° 501.

529. Si on mène par le sommet S du cône un plan II′ de manière qu'il passe entre les deux nappes, et n'ait que ce point de commun avec elles, alors tout plan parallèle à celui-ci ne pourra couper qu'une seule nappe, car il ne peut rencontrer l'autre nappe sans passer par

le plan II′, ce qui est impossible ; de plus, aucune arête ne saurait être parallèle à ce plan ; il les rencontrera toutes, et la section sera par conséquent une courbe fermée.

530. (*Fig.* 114.) Si on mène par le sommet du cône S un plan SBD, tel qu'il coupe le cône suivant deux *élémens* SB, SD, tout plan BCD parallèle rencontrera les deux nappes du cône, et formera dans chacune une courbe ouverte dont les branches s'étendront à l'infini avec le cône ; en effet, les deux élémens SB, SD ne pourront rencontrer le plan, puisqu'ils lui sont parallèles, mais toutes les arêtes situées entre SBD et C le rencontrent sur la nappe inférieure ; et les arêtes qui sont de l'autre côté du plan SBD le rencontrent sur la nappe superieure ; ces courbes ne peuvent se fermer, puisqu'il y a deux arêtes vers lesquelles elles s'approchent sans cesse, sans pouvoir jamais les atteindre.

531. (*Fig.* 115.) Si on mène par le sommet du cône S un plan tangent SDVV′, tout plan parallèle ne coupera qu'une seule nappe du cône suivant une courbe ouverte D′CB′, qui se prolongera à l'infini avec le cône, sans pouvoir jamais se fermer ; car, à l'exception du seul élément SD, tous les autres élémens rencontreront le plan.

532. Ainsi, selon que le plan passant par le sommet aura

1° Ce point seulement en commun avec la surface ;

2° Deux droites en commun avec la surface ;

3° Une droite en commun avec la surface.

Le plan coupant parallèle donnera

1° Une courbe fermée ;

2° Une courbe à deux branches ouvertes, infinies;

3° Une courbe à une branche ouverte, infinie.

533. En raisonnant comme on a fait pour le cylindre, on prouve, 1° que les surfaces coniques sont développables; 2° que le plus court chemin, pour aller d'un point à un autre, est la ligne qui devient une droite dans le développement, et cette ligne est encore à double courbure (505); 3° il est facile de résoudre pour le cône les problèmes analogues à ceux dont la solution a été donnée pour le cylindre (501).

Surfaces de révolution.

534. Nous avons vu, 1° que le plan est engendré par le mouvement d'une droite qui tourne autour d'une droite fixe qu'elle rencontre à angle droit; 2° que le cône droit est engendré par le mouvement d'une droite qui tourne autour d'une droite fixe qu'elle rencontre sous un angle qui n'est pas droit; 3° que le cylindre est engendré par le mouvement d'une droite qui tourne autour d'une droite fixe, qu'elle ne rencontre qu'à l'infini, à laquelle elle est parallèle; dans ces trois cas, la ligne mobile est droite; en y substituant une ligne brisée ou courbe, et la faisant tourner autour de l'axe fixe, on engendre des surfaces, connues sous le nom de *surfaces de révolution*. Il n'est pas nécessaire que la ligne mobile soit plane; elle peut être à double courbure; et, lorsqu'elle est plane, l'axe peut

être situé hors de ce plan; on en a un exemple dans l'hyperboloïde de révolution. Voici comment cette surface est engendrée (*fig.* 116): soient AB, CD, EF, un système de deux droites parallèles et d'une perpendiculaire commune EF; AB et CD sont donc dans un même plan; faites tourner CD autour de EF, de manière qu'elle prenne une position KL, mais toujours perpendiculaire à EF; alors elle n'est plus avec AB dans un même plan; maintenant, AB restant fixe, que EF tourne autour: elle emportera avec elle la ligne RL, qui fesant toujours le même angle avec l'axe, en sera toujours éloignée de EF (Note 17), et dont tous les points décriront des circonférences dont la réunion forme une surface qui a été nommée hyperboloïde de révolution (*fig.* 117), parce qu'elle est la même que celle qu'engendre une hyperbole LMN, tournant autour de son axe transverse BAB'.

535. (*Fig.* 118.) On nomme *surface annulaire* celle qui est engendrée par le mouvement d'un cercle tournant autour d'une droite fixe située dans son plan.

536. Lorsque la droite fixe est un diamètre, la surface annulaire prend le nom de *sphère*: ainsi, la sphère est une surface engendrée par une circonférence ou une demi-circonférence AMB tournant autour de son diamètre AB (*fig.* 119); nous allons étudier les propriétés de la sphère; c'est la plus simple des surfaces de révolution, engendrées par des lignes courbes.

Sphère.

537. Tous les points de sa surface sont également éloignés du milieu O du diamètre ; ce point O se nomme *centre de la sphère* ; les droites, telles que ON, qui vont du centre à la surface, se nomment *rayons*. Il est évident que tous les rayons sont égaux.

538. Une droite ne peut couper une sphère qu'en deux points (111). On nomme *corde* la droite qui réunit deux points d'une sphère ; lorsque la corde passe par le centre, elle se nomme *diamètre* ; il est évident que tous les diamètres sont égaux, et que le diamètre est la plus grande des cordes.

539. La section d'une sphère par un plan est un cercle ; car tous les points de la section étant également éloignés du centre de la sphère, forment une circonférence (359) ; tous les rayons qui vont à cette circonférence forment un cône droit dont l'axe est la droite qui joint le centre de la sphère au centre de la circonférence ; le rayon de la section est toujours plus petit que celui de la sphère, et elle se nomme *petit cercle*, lorsque le plan coupant ne passe pas le centre ; lorsqu'il y passe, la section est un *grand cercle*. Par deux points donnés sur la sphère passent une infinité de petits cercles et un seul grand cercle.

Deux grands cercles se coupent toujours suivant un diamètre de la sphère.

540. Un plan mené par l'extrémité d'un rayon, perpendiculairement à ce rayon, est *tangent à la sphère* ; car tous les points

étant plus éloignés du centre de la sphère que ce point de contact, sont nécessairement hors de la sphère.

541. L'angle que forme un plan tangent avec un petit cercle passant par le point de contact, est égal ou supplémentaire à l'angle que forme le rayon qui passe par le point de contact, avec la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan du petit cercle (402).

542. Tous les plans tangens menés à la sphère par les points d'un petit cercle, sont également inclinés sur son plan (541), et leurs intersections forment un cône droit, qui a les mêmes plans tangens que la sphère, et ce cône est tangent à la sphère; il devient un cylindre lorsque les points de contact forment la circonférence d'un grand cercle.

En développant ce cylindre, la circonférence se développe suivant une droite; donc le petit arc de grand cercle qui passe par deux points, mesure le plus court chemin pour aller d'un de ces points à l'autre, sans quitter la surface.

543. Réciproquement, par un point donné hors de la sphère, on peut donc mener une infinité de plans tangens à la sphère, et leurs intersections forment un cône tangent à la sphère.

Zone sphérique à une base; son aire.

544. (*Fig.* 120.) La portion de surface sphérique engendrée par l'arc AM^{IV} du diamètre AB, se nomme *zone sphérique*; le

cercle décrit par la perpendiculaire $P^{IV}M^{IV}$ est sa *base*.

545. Après avoir divisé l'arc AM^{IV} en parties égales, soient menées les cordes AM, MM', M'M'', et abaissées du centre O les perpendiculaires OI, OI', OI''... Supposons que le polygone équilatéral tourne avec l'arc circonscrit autour du diamètre.

La corde AM engendre un cône dont l'aire est égale à $AP \times$ cir. OI (520).

La corde MM' engendre un cône tronqué dont l'aire est égale à $PP' \times$ cir. OI' (521).

La corde M'M'' engendre un cône dont l'aire est égale à $P'P'' \times$ cir. OI''. Et ainsi de suite.

Or, $OI = OI' = OI'' = OI'''...$

Donc l'aire de la surface engendrée par le polygone équilatéral inscrit, sera égale à

$$\text{cir. } OI\,(AP + PP' + P'P'' + P''P'''...) =$$
$$= \text{cir. } OI \times AP^{IV}.$$

L'aire de la zone est évidemment plus grande que l'aire engendrée par le polygone; plus le nombre des côtés de celui-ci augmente, et moins il diffère de l'arc, et moins OI diffère du rayon de la sphère. En circonscrivant un polygone, on trouvera que l'aire de la zone est plus petite que celle de la surface qu'il engendre; employant donc le principe des limites, on prouve que l'aire de la zone est *égale à sa hauteur* AP^{IV} *multipliée par la circonférence d'un grand cercle de la sphère.*

Ainsi soit $AP^{IV} = H =$ hauteur de la zone,

$OM = R =$ rayon de la sphère,

$S =$ aire de la zone,

$D = 2R =$ diamètre;

on aura $S = 2\pi RH = 2\pi RR$ sin. vers. arc $=$

$= 2\pi R^2$ sin. vers. arc $a = \frac{\pi D^2}{2}$ sin. vers. arc $a =$

$= 4\pi R^2$ sin. $^2 \frac{1}{2} a$; on a désigné l'arc par a.

Exemple. soit $R = 16^m$

$H = 5^m$

$$\pi = \frac{22}{7};$$

on aura $S = \frac{44}{7} \times 50 = \frac{2200}{7} = 314^{mm} \frac{2}{7}$.

Zone à deux bases ; son aire.

546. (*Fig.* 120.) La zone à deux bases est une portion de la surface sphérique, décrite par l'arc MM', tournant autour du diamètre AB ; PM est le rayon de la petite base, et PM' celui de la grande base ; l'aire de cette zone est égale à l'aire de la zone AM, moins l'aire de la zone AM ; or l'aire de la zone AM = AP circ. OM,

AM' = AP' circ. OM ;

donc aire zone MM' = circ. OM (AP' — AP) = = circ. OM × PP' ; or PP' est la distance entre les deux bases, ou la hauteur de la zone : ainsi l'aire d'une zone à deux bases, et par conséquent d'une zone quelconque, est égale à sa hauteur multipliée par la circonférence d'un grand cercle ; d'où

$$A = 4\pi R^2 (\sin.^2 \tfrac{1}{2} a - \sin.^2 \tfrac{1}{2} b) =$$
$$= 4\pi R^2 \sin. \tfrac{1}{2}(a+b) \sin. \tfrac{1}{2}(a-b) =$$
$$= S \sin. \tfrac{1}{2}(a+b) \sin. \tfrac{1}{2}(a-b) =$$
$$= \frac{S}{2} (\cos. b - \cos. a ;$$

où a, b désignent les arcs générateurs, S l'aire de la sphère, et A celle de la zone (table 8 form. 27).

Aire de la sphère.

547. L'aire de la surface engendrée par la demi-circonférence AMB, ou l'aire de la sphère, est égale à l'aire engendrée par l'arc AM^{IV}, plus celle engendrée par l'arc BM^{IV};

or, aire zone $AM^{IV} = AP^{IV}$ circ. OM (546);

$BM = BP^{IV}$ circ. OM; donc

aire de la sphère $=$ circ. OM $(AP^{IV} + BP^{IV}) =$
$=$ circ. OM. AB.

Ainsi, l'*aire d'une sphère* est égale à son diamètre multiplié par la circonférence d'un grand cercle.

Soit $R =$ rayon,
$D = 2R =$ diamètre,
$S =$ aire de la sphère;

on aura $S = 2R.\, 2\pi R = 4\pi R^2 =$

$$= 4\pi.\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \pi D^2.$$

Exemple. Soit $R = 10^m$; et $D = 20^m$;

$$S = \frac{22}{7}.\, 20^2 = \frac{22.400}{7} = \frac{8800}{7} = 1255^{mm}\tfrac{5}{7}.$$

548. Soit encore $R = 1432$ lieues de 2280 toises; c'est la longueur du rayon terrestre, sous la latitude de $45°$; on a alors $D = 2864$;

$$\begin{aligned} \log. D &= 3{,}4569730 \\ \log. D^2 &= 6{,}9139460 \\ \log. \pi &= 0{,}4971499 \\ \hline \log. \pi D^2 &= 7{,}4110959 = \\ &= \log. 25769000 \text{ environ.} \end{aligned}$$

Donc la terre, considérée comme sphère, a environ 25,769,000 lieues carrées de surface.

Les zones glaciales sont des zones à une base décrite par des arcs de 23° 28′;

or, $\log. \pi D^2 = 7{,}4110959$

$\log. \sin. v. circ. = 0{,}9175480 - 2$

$\log. \pi D^2 \sin. vers. = 6{,}3286439$

$\log. 2 = 0{,}3010300$

$$\log. \frac{\pi D^2 \sin. vers.}{2} = 6{,}0276139 =$$

$= 1065700$ environ.

Donc les deux zones glaciales renferment 2131400 lieues carrées.

Les zones tempérées sont des zones à deux bases engendrées par un arc de 43°. 4′.

L'aire d'une zone tempérée est égale à l'aire de la zone de 66°. 32′, moins l'aire de la zone de 23°. 28′;

or $\log. \sin. vers. 66°. 32' = 0{,}7794410 - 1$

$$\log. \frac{\pi D^2}{2} = 7{,}1100559$$

$$\log. \frac{\pi D}{2} \sin. v. 66° .32' = 6{,}8895069 =$$

$= 7753600$ environ.

Les deux zones tempérées renferment ensemble 15507200 lieues carrées; retranchant les zones glaciales et tempérées de la sphère totale, il reste pour la zone torride 8130400; en résumé;

2 zones glaciales = 2131400 lieues carrées.
2 zones tempérées = 15506200
zone torride = 8130400
globe entier = 25769000

Ainsi, à peu près, les zones glaciales prennent les $\frac{2}{25}$ du globe, moins que $\frac{1}{12}$;

Les zones tempérées prennent les $\frac{15}{25}$ du globe, $=\frac{3}{5}$.

La zone torride prend les $\frac{8}{25}$ du globe, moins que $\frac{1}{3}$.

Secteur sphérique ; sa solidité.

549. (*Fig.* 120.) On nomme secteur sphérique le solide engendré par la révolution du secteur circulaire AOM, autour du rayon AO.

Inscrivons dans l'arc un polygone équilatéral AMM′ M″ M‴ M^{IV}, et menons les rayons OM, OM′, OM″...

Le triangle AMO, par sa révolution autour de AO, engendre deux cônes ayant le cercle PM pour base commune ; or, l'on a solidité du cône engendré par

$$APM = \frac{1}{3}\pi \,.\, AP \,.\, PM^2. \ (523),$$
$$OPM = \frac{1}{3}\pi \,.\, OP \,.\, PM^2.;$$

d'où solidité du cône engendré par AMO $=$
$= \frac{1}{3}\pi \,.\, PM^2 (AP + PO) = \frac{1}{3}\pi \,.\, PM^2 .\, AO.$

Mais $AO \times PM$ et OI. AM expriment le double de l'aire du triangle AOM ; on peut donc remplacer une expression par l'autre, et il vient, solidité du cône engendré par AMO $=$
$= \frac{1}{3}\pi \,.\, PM.\ OI.\ AM = \frac{2}{3}\pi \,.\ PM \,.\ OI \,.\ AI.$

Les triangles semblables APM, AIO, donnent la proportion

$$AI : OI :: AP : PM ;$$

d'où $$AI \times PM = OI \,.\, AP;$$

et, par conséquent, solidité du cône engendré par AMO $= \frac{2}{3}\pi \,.\, AP \,.\, OI^2$.

(*Fig.* 120 *bis.*) Prolongeons la corde MM′ jusqu'à ce qu'elle rencontre le diamètre B en N;

par le point I, milieu de MN, abaissons sur le diamètre la perpendiculaire I'K, et menons la parallèle M'R ; le solide décrit par le triangle M'ON est égal à la différence des solides décrits par les triangles M'ON, MON ;

Or, $\quad$ solide $M'ON = \frac{1}{3}\pi . ON . P'M'^2$,
solide $MON = \frac{1}{3}\pi . ON . PM^2$:

donc solide $M'OM = \frac{1}{3}\pi . ON . (P'M'^2 - PM^2) =$
$= \frac{1}{3}\pi . ON . (P'M' + PM)(P'M' - PM)$;

mais $P'M' + PM = 2I'K$; $P'M' - PM = RM'$:

solide $M'OM = \frac{1}{3} . \pi . ON . 2I'K . RM' =$
$= \frac{2}{3}\pi . ON . I'K . RM'$.

A cause du triangle rectangle OI'N, on a la proportion

$$ON : OI' :: OI' : OK ;$$

de plus, les triangles semblables MRM', OKI' donnent $\quad M'R : MR :: OK : I'K$.

Multipliant les proportions, il vient

$$ON . M'R : OI' . MR :: OI' : I'K ;$$

d'où $\quad ON . M'R . I'K = OI'^2 . MR$.

Ainsi on a

solide $M'ON = \frac{2}{3}\pi . MR . OI'^2 = \frac{2}{3}\pi . PP' . OI'^2$.

On trouvera de même (*fig.* 120)

solide $M''OM' = \frac{2}{3}\pi P'P'' . OI''^2$, et ainsi de suite.

Et comme $OI = OI' = OI''$..., on aura

solide engendré par le polygone inscrit équilatéral $= \frac{2}{3}\pi OI^2 (AP' + P'P'' + P'' + \ldots) =$
$= \frac{2}{3}\pi OI^2 . AP^{IV}$.

Désignant par S la surface engendrée par le polygone, et par V son volume, nous aurons

$S =$ cir. $OI . AP^{IV} = 2\pi OI . AP^{IV}$ (545) :

donc $\quad V = \frac{1}{3} OI . S$.

Ainsi, le solide est égal à sa surface multipliée par le tiers du rayon inscrit. Cette conclusion ne dépendant pas du nombre des côtés,

il s'ensuit que la solidité du secteur sphérique est égale à l'aire de la zone AMM', multipliée par le tiers du rayon.

On parvient de suite à ce résultat en considérant le secteur comme un assemblage d'une infinité de cônes droits, ayant tout le centre de la sphère pour sommet et pour base de petits cercles décrits sur la base du secteur.

Soit $R =$ rayon de la sphère; $H = AP^{IV} =$ la hauteur du zone; $V =$ volume du secteur, on aura

$$V = \tfrac{2}{3}\pi R^2 . H = \tfrac{2}{3}\pi R^2 . R \text{ sin. vers. } AMM' =$$
$$= \tfrac{2}{3}\pi R^3 . \text{sin. vers. } AMM' . = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \text{ sin.}^2 \tfrac{1}{2} AMM'.$$

Solidité de la sphère.

550. La solidité de la sphère est égale à la somme des solides engendrés par les secteurs AOM^{IV} et BOM^{IV}: donc elle est égale à la surface de la sphère multipliée par le tiers du rayon.

Soit R le rayon de la sphère, D le diamètre, V son volume, on aura

$$V = 4\pi R^2 . \tfrac{1}{3} R = \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{4}{3}\pi . \left(\frac{D}{2}\right)^3 =$$
$$= \tfrac{4}{3}\pi \frac{D^3}{8} = \tfrac{1}{6}\pi D^3.$$

Le globe terrestre contient 1,080 quadrillions de mètres cubes, et pèse 5,400 sextillions de kilogrammes (Desdouits, géom., p. 301).

Segment à une base; solidité.

551. Le *segment à une base* est le solide engendré par la révolution du segment cir-

culaire $AP^{IV}M^{IV}$ autour du rayon AO; la perpendiculaire $P^{IV}M^{IV}$ décrit la base; la solidité de ce segment est égale au solide engendré par le secteur OAM^{IV}, moins le cône engendré par le triangle $OP^{IV}M^{IV}$, ou

$$\text{solide } AP^{IV}M^{IV} = \text{solide } OAM^{IV} - \text{solide } OP^{IV}M^{IV}.$$

Faisons $OA = R$; $AP^{IV} = H$; $P^{IV}M^{IV} = y$;

$$OP^{IV} = B - H,$$

nous aurons

$$\text{solide } OAM^{IV} = \tfrac{2}{3}\pi R^2 H,$$
$$\text{solide } OP^{IV}M^{IV} = \tfrac{2}{3}\pi y^2 (R - H);$$

d'où

$$\text{solide } AP^{IV}M^{IV} = \tfrac{2}{3}\pi R^2 H - \tfrac{1}{3}\pi R y^2 + \tfrac{1}{3}\pi H y^2.$$

La corde AM^{IV} est moyenne proportionnelle entre le diamètre 2R et le segment AI: donc $2RH = AM^{IV\,2} = y^2 + H^2$; de là

$$\text{solide } AD^{IV}M^{IV} = \tfrac{1}{3}\pi R . 2RH - \tfrac{1}{3}\pi R y^2 + \tfrac{1}{3}\pi H y^2$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi R (y^2 + H^2) - \tfrac{1}{3}\pi R y^2 + \tfrac{1}{3}\pi H y^2;$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi R H^2 + \tfrac{1}{3}\pi H y^2 = \tfrac{1}{6}\pi H . 2RH + \tfrac{1}{3}\pi H y^2;$$
$$= \tfrac{1}{6}\pi H (y^2 + H^2) + \tfrac{1}{3}\pi H y^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi H y^2 + \tfrac{1}{6}\pi H^3.$$

Or, πy^2 est l'aire de la base; $\frac{1}{6}\pi H^3$ est la solidité d'une sphère qui aurait pour diamètre H (550).

Donc la *solidité d'un segment sphérique à une base* est égale à sa hauteur multipliée par la moitié de la base, plus la solidité d'une sphère qui a cette hauteur pour diamètre.

Segment sphérique à deux bases ; sa solidité.

552. Ce segment sphérique est le solide compris entre deux sections parallèles faites dans la sphère; PM est le rayon de la petite base, et $P^{IV}M^{IV}$ celui de la grande base.

Soit T la solidité cherchée ; et soient $H' = AP^{IV}$; $H = AP$; $PM = y$; $P^{IV}M^{IV} = y'$; on aura
$T = \frac{1}{2}\pi(H'y'^2 - Hy^2) + \frac{1}{6}\pi(H'^3 - H^3)$:
$= \frac{1}{2}\pi(H'-H)(y'^2+y^2) - \frac{1}{2}\pi(H'y^2 - Hy'^2) +$
$+ \frac{1}{6}\pi(H'^3 - H^3)$;

$$\text{or}, \ 2R = \frac{y^2 + H^2}{H} = \frac{y'^2 + H'^2}{H'} \ (444) ;$$

d'où $H'y^2 - Hy'^2 = HH'^2 - H'H^2$;
par conséquent,
$T = \frac{1}{2}\pi(H'-H)(y'^2+y^2) - \frac{1}{2}\pi(HH'^2 - H'H^2) +$
$+ \frac{1}{6}\pi(H'^3 - H^3)$
$= \frac{1}{2}\pi(H'-)(y'^2+y^2) + \frac{1}{6}\pi(H'^3 - 3H'^2H +$
$+ 3H'H^2 - H^3)$,
$= \frac{1}{2}\pi(H'-H)(y'^2+y^2) + \frac{1}{6}\pi(H' - H)^3$.

Mais $H' - H = PP^{IV}$, πy^2, $\pi y'^2$, sont les aires des bases ; d'où *la solidité du segment sphérique* à deux bases est égale à sa hauteur multipliée par la demi-somme des bases, plus la solidité d'une sphère qui a cette hauteur pour diamètre.

Fuseau sphérique ; son aire.

553. (*Fig.* 121.) Deux grands cercles AMBM', ANBN', coupent la surface de la sphère en quatre parties, dont deux opposées sont égales ; chacune de ces parties se nomme *fuseau sphé-*

rique ; par le centre O menons un grand cercle OMN, perpendiculaire au diamètre commun AB; l'arc MN mesure l'angle dièdre formé par les demi-cercles AMB, ANB; l'aire du fuseau est contenue dans l'aire de la sphère autant de fois que l'arc MN est contenu dans sa circonférence ; désignons donc par A le nombre de degrés de l'arc MN ; par F, l'aire du fuseau, et par S l'aire de la sphère ;

on aura $$A : 360^\circ :: F : S;$$

d'où $$F = S \cdot \frac{A}{360^\circ}.$$

Soit, par exemple, $A = 90^\circ$; alors $F = S \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4} S$; ce qui est évident.

Onglet sphérique ; sa solidité.

554. (*Fig.* 121.) On nomme *onglet sphérique*, la partie du solide de la sphère interceptée entre les plans des demi-cercles AMB, ANB; conservant les mêmes notations qu'au nº précédent et désignant par O la solidité de l'onglet, par V celle de la sphère,

on aura évidemment $O = V \cdot \frac{360^\circ}{A}$;

d'où $$\frac{O}{F} = \frac{V}{S} = \frac{1}{3} R;$$

et $O = \frac{1}{3} R \cdot F$, où R est le rayon de la sphère.

Ainsi, la *solidité de l'onglet* est égale à l'aire du fuseau multipliée par le tiers du rayon ; ce qu'on pouvait conclure *à priori*.

Triangle sphérique ; son aire.

555. (*Fig.* 121.) Trois plans de grands cercles AMBM′, ANBN′, MNM′N′, coupent la surface de la sphère en huit parties ; chacune se nomme triangle sphérique ; ces huit parties sont :

1° ANM, BNM ;
2° ANM′, BNM′ ;
3° AN′M′, BN′M ;
4° AN′M, BN′M.

Ce qui donne huit triangles sphériques, dont la somme des aires est égale à celle de la sphère.

556. Les trois diamètres AB, MM′, NN′, forment aussi huit angles solides trièdes, et les angles opposés par le sommet sont égaux par symétrie.

Soient menés les trois rayons ON, OM, OA, ils forment trois angles plans et trois angles dièdres ; les angles plans sont mesurés par les arcs AN, AM, MN ou côtés du triangle sphérique AMN.

L'angle A désigne l'angle dièdre formé par le plan AOM, AON
M MOA, MON
N NOA, NOM.

Ainsi, dans tout triangle sphérique les côtés mesurent les angles plans, tandis que ses angles sont des angles dièdres d'un angle solide formé par des rayons qui aboutissent aux sommets ; il suit de là que toutes les propriétés des angles solides trièdres se rapportent aux triangles sphériques, en modifiant

seulement les dénominations, et que tous les problèmes résolus et tous les calculs que nous avons faits sur les angles solides se rapportent aussi aux triangles sphériques; par conséquent, il suffit de connaître trois des six choses qu'on considère dans un triangle sphérique, pour construire et calculer les trois autres. Le calcul des triangles sphériques et des angles solides est donc une seule et même opération. Comme le principal usage des angles solides a lieu en astronomie, où l'on rapporte tout à la sphère, il s'en est suivi que le calcul des angles solides a reçu le nom de *trigonométrie sphérique*.

557. Deux trièdres symétriques peuvent se décomposer chacun en trois trièdres égaux, chacun à chacun par application (437); de là on conclut que deux triangles sphériques symétriques peuvent chacun se décomposer en trois triangles sphériques égaux par application; donc ces deux triangles sphériques sont équivalens en surface (*fig.* 121); ainsi l'on a

$$\begin{aligned} ANM &= BN'M' \\ AM'N' &= BNM \\ BN'M &= ANM' \\ BNM' &= AN'M; \end{aligned}$$

donc $ANM + AM'N' + BN'M + BNM' = \frac{S}{2}$;

où S désigne la surface de la sphère.

558. (*Fig.* 121.) Le fuseau ANMB est égal à la somme des deux triangles sphériques NAM, BNM; mais le triangle BNM est équivalent à son symétrique AM'N;

$$\text{donc } NAM + AM'N' = S.\frac{A}{360^\circ}\ (553);$$

par les mêmes raisons, l'on a

$$ANM + BNM' = S.\frac{N}{360^\circ},$$

$$AMN + BN'M = S.\frac{M}{360^\circ};$$

ajoutant ces équations, il vient

$$3\,ANM + AM'N' + BNM' + BN'M = $$
$$= S.\left(\frac{A+M+N}{360^\circ}\right);$$

$$\text{mais } ANM + AM'N' + BNM' + BN'M = \frac{S}{2};$$

$$\text{donc}\quad 2.ANM + \frac{S}{2} = S.\frac{A+M+N}{360^\circ},$$

$$2.ANM = \frac{S}{2}\left(\frac{A+M+N}{180^\circ} - 1\right),$$

$$AMN = \frac{S}{4}\left(\frac{A+M+N}{180^\circ} - 1\right);$$

$$= \frac{S}{4}\left(\frac{A+M+N-180^\circ}{180^\circ}\right).$$

Pour avoir donc l'*aire d'un triangle sphérique*, il faut ôter 180° de la somme de ses angles, diviser le reste par 180°, et multiplier le quotient par le quart de la surface de la sphère. (Note 18.)

559. Le triangle sphérique tri-rectangle est celui qui a ses trois angles égaux chacun à un angle droit: désignant son aire par S' on aura $S' = \frac{S}{4}\left(\frac{270-180}{180^\circ}\right) = \frac{S}{4}.\frac{90}{180^\circ} = \frac{S}{8};$

ce qui est évident *à priori*; d'où l'on conclut $AMN = \frac{8S'}{4}\left(\frac{A+M+N-180°}{180°}\right) =$

$$= S'\left(\frac{A+M+N-180°}{90°}\right).$$

Ainsi, un triangle sphérique contient le triangle tri-rectangle autant de fois que l'excès de ses angles, sur 180°, contient 90°.

Exemple : Soit $R = 1^m$; et $A = M = N = 70° 31' 44''$. (Page 244) ;

alors $$A+M+N = 211°.35'.12'',$$

$$A+M+N-180 = 31°.35'.12'',$$

$$\frac{A+M+N-180}{90°} = \frac{31°.35'.12''}{90°} =$$

$$= \frac{113712''}{324000''} = \frac{9476}{27000} = \frac{2369}{6750}$$

$$S' = \tfrac{1}{2}\pi R^2 = \tfrac{1}{2}\pi = \frac{11}{7},$$

$$AMN = S'.\frac{2369}{6750} = \frac{11.2369}{7.6750} =$$

$$= \frac{26059^{mm}}{47256} = 0^{mm},55152 \text{ environ.}$$

Polygone sphérique ; son aire.

560. Le polygone sphérique est une portion de la surface de la sphère terminée par des arcs de grands cercles.

Un polygone pouvant être décomposé en autant de triangles sphériques qu'il y a de côtés moins deux, il s'ensuit que l'aire d'un polygone sphérique contient l'aire du triangle

tri-rectangle autant de fois que l'angle droit est contenu dans l'excès de la somme de ses angles sur deux angles droits multipliés par le nombre de côtés moins deux.

Pyramide sphérique; sa solidité.

561. La pyramide sphérique est la partie du solide de la sphère comprise entre les faces d'un angle solide qui a son sommet au centre. La solidité de la pyramide sphérique est égale à la surface du polygone sphérique qu'elle intercepte, multipliée par le $\frac{1}{3}$ du rayon (549).

562. En général, la solidité d'une partie de la sphère interceptée par une surface conique, qui a son sommet au centre, est égale à la surface sphérique interceptée, multipliée par le tiers du rayon.

563. Le côté d'un triangle sphérique est plus petit que la somme des deux autres côtés (414); le côté d'un polygone sphérique est donc plus petit que la somme de tous les autres côtés. On démontre que le plus court chemin, 1° pour aller sur la sphère d'un point à un petit cercle, c'est l'arc de grand cercle perpendiculaire au petit cercle; 2° pour aller d'un petit cercle à un autre, c'est l'arc de grand cercle, qui est à la fois perpendiculaire aux deux petits cercles.

Comparaison des sphères entre elles; mesure des angles solides; plans polaires; plans disomologues.

564. En comparant les valeurs des aires et des solidités pour deux sphères de rayons différens, on en conclut directement que les aires

sont entre elles comme les carrés des rayons, et les solidités comme les cubes des rayons. Sans connaître ces valeurs, on peut arriver au même résultat, en considérant que les sphères sont des surfaces semblables; elles ont des centres de similitude qui jouissent de propriétés analogues à celles que nous avons trouvées dans les cercles ; ces points, les plans polaires, les plans disomologues, servent à résoudre tous les problèmes qu'on peut proposer sur les contacts des quatre sphères par une cinquième, ou de trois sphères par une quatrième d'un rayon donné ; car il est facile de démontrer :

1° Que si, par un point fixe considéré comme pôle on mène tant de sécantes qu'on voudra dans la sphère, et que, par les points de rencontre de chaque sécante, on mène deux plans tangens, les intersections de ces plans tangens sont toutes dans un même plan, qui est le *plan polaire* du point fixe;

2° Qu'étant donné le centre de similitude, interne ou externe de deux sphères, si l'on détermine les plans polaires, par rapport à ce centre considéré comme pôle, le plan parallèle situé à égale distance des deux polaires, sera un *plan disomologue*.

565. Les zones, les secteurs, les segmens, sont *semblables* lorsqu'ils sont engendrés par des arcs semblables : donc les aires des zones semblables sont entre elles comme les carrés des rayons, et les solidités des secteurs, des segmens semblables, sont entre elles comme les cubes des rayons.

566. Étant données deux sphères concentriques, si l'on trace sur l'une d'elles un poly-

gone sphérique quelconque, et qu'on mène les rayons aux sommets des angles, ces rayons interceptent sur l'autre sphère un polygone semblable. Les aires des polygones sphériques semblables sont donc entre elles comme les carrés des rayons, ou comme les carrés des côtés homologues, et ces figures jouissent de propriétés analogues à celles des polygones rectilignes semblables.

567. Les *pyramides sphériques* semblables sont entre elles comme les cubes des rayons; une pyramide sphérique est contenue dans la pyramide tri-rectangle sphérique autant de fois que l'aire du polygone, base sphérique de la pyramide, est contenue dans l'aire du triangle tri-rectangle; les rapports de ces aires peuvent donc servir à connaître les rapports entre les angles solides, et par conséquent à les mesurer. Par exemple, un angle solide de 20° est un angle tel, que si l'on prend son sommet pour centre d'une sphère de rayon quelconque, les faces de l'angle interceptent sur la sphère un polygone dont l'aire est contenue dans l'aire du triangle tri-rectangle construit sur la même sphère comme 20 : 90 ou comme 2 : 9. Ainsi, un angle solide tétraèdre peut être équivalent à un angle solide pentaèdre, etc.

La même mesure subsiste lorsque la pyramide se change en cône; alors l'angle solide conique est contenu dans l'angle solide tri-rectangle, comme la surface interceptée par le cône est à celle qui est interceptée par le triangle tri-rectangle; lorsque les rayons des sphères augmentent, les surfaces interceptées augmentent comme les carrés des rayons; mais

la mesure de l'angle conique reste toujours constante ; ainsi lorsque cet angle représente l'action physique que le sommet exerce sur ces surfaces, comme de les éclairer, de les chauffer, de les attirer, selon que ce sommet est un point lumineux, calorifiant, ou attractif, ou répulsif, les intensités locales d'action sur ces surfaces décroissent comme les carrés des rayons ou des distances au sommet.

Division de la sphère en parties égales ; cinq corps réguliers.

568. On nomme *polyèdre régulier*, celui dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux, et dont les angles solides sont égaux et superposables ; on démontre aisément qu'à tout polyèdre régulier, on peut circonscrire une sphère ; et que le centre de cette sphère étant également éloigné de toutes les faces, on peut aussi y inscrire une sphère.

En menant des plans par le centre et les arêtes, on décompose la sphère circonscrite en autant de polygones sphériques égaux que le polyèdre a de faces ; ces *polygones sphériques* sont *réguliers* ; c'est-à-dire que chacun est équilatéral et équiangle.

569. PROBLÈME CIII. Partager la surface de la sphère en parties égales par des triangles équilatéraux.

Solution. Soit A un angle de ce triangle : on aura $3\,A > 180$; par conséquent, $A > 60°$ et $< 180°$; tous les angles qui se réunissent autour d'un même sommet, valent $360°$: il

faut donc que A soit un diviseur de 360°, compris entre ces limites; dès lors, A ne peut avoir que l'une de ces trois valeurs $A = 120°$

$$A = 90°$$
$$A = 72°.$$

1° Faisons $A = 120°$; l'aire du triangle =

$$= S'\left(\frac{3A - 180°}{90°}\right) = S'\frac{180°}{90°} = 2S'. = \frac{1}{4}S$$

(558); par conséquent, ce triangle est le $\frac{1}{4}$ de la sphère.

Si on joint par des cordes les quatre sommets des triangles, on aura un tétraèdre régulier inscrit.

2° $A = 90°$;

$$\text{l'aire du triangle} = \frac{S}{8}\left(\frac{3.90° - 180°}{90°}\right) =$$

$$= \frac{S}{8}\cdot\frac{270° - 180°}{90°} = \frac{S}{8}\cdot\frac{90°}{90°} = \frac{S}{8}.$$

Ainsi, ce triangle est contenu 8 fois dans l'aire de la sphère.

Il est évident que c'est le triangle tri-rectangle.

Menant les cordes des arcs, on obtient un octaèdre régulier qui est composé de deux pyamides régulières quadrangulaires égales et adossées par une base carrée.

3° $A = 72°$;

$$\text{l'aire du triangle} = \frac{S}{8}\left(\frac{3.72° - 180°}{90°}\right) =$$

$$= \frac{S}{8}\cdot\frac{216° - 180°}{90°} = \frac{36 . S}{8 . 90°} = \frac{S}{20}.$$

Ainsi ce triangle est contenu 20 fois dans l'aire de la sphère.

Si on mène les cordes des arcs sur la sphère, on obtient l'icosaèdre régulier, formé de 20 triangles équilatéraux.

570. Problème CIV. Partager la sphère en parties égales par des carrés sphériques?

Solution. Un carré sphérique a les quatre côtés égaux et les angles égaux.

Soit A un des angles du carré, on aura $4A > 360°$: ainsi A est compris entre 90° et 180°.

De plus, A doit diviser exactement 360° : donc on a nécessairement $A = 120°$; l'aire de ce carré est égale à

$$\frac{S}{8} \cdot \frac{4A - 360°}{90°} = \frac{S}{8} \cdot \frac{480° - 360°}{90°} = \frac{S}{6};$$

donc le carré sphérique est contenu 6 fois dans la sphère; menant les cordes, on obtient le cube, composé de 6 carrés; car il est facile de démontrer que les quatre cordes d'un même carré sphérique sont dans un même plan et forment un carré.

571. Problème CV. Partager la sphère en parties égales par des pentagones réguliers?

Solution. Soit A l'un des angles du pentagone, on aura $5A > 3 \cdot 180°$: ainsi A est compris entre 108° et 180°. Or, A devant diviser exactement 360°, on a nécessairement $A = 120°$: donc l'aire du pentagone =

$$= \frac{S}{8}\left(\frac{5 \cdot 120° - 3 \cdot 180°}{90°}\right) = \frac{S}{8} \cdot \frac{600° - 540°}{90°} =$$

$$= \frac{S}{8} \cdot \frac{60°}{90°} = \frac{S}{12}.$$

Ainsi, ce pentagone est contenu 12 fois dans

la sphère, et il y en a 3 autour de chaque angle; menant les cordes, on obtient un polyèdre composé de 12 pentagones réguliers, ayant les angles solides égaux : c'est le dodécaèdre régulier.

572. On ne peut partager la sphère par des polygones réguliers, ayant plus de 5 côtés; car, soit A l'angle du polygone de 6 côtés, on aura $6A > 4 . 180$; d'où $A > 120$ et < 180; mais A doit diviser exactement 360°. Or, il n'existe point de diviseur de 360 entre 120 et 180; il n'y a donc que 5 manières de partager la sphère en parties égales et superposables; il n'existe donc que 5 polyèdres réguliers : 1° le tétraèdre; 2° l'octaèdre; 3° l'icosaèdre; 4° l'hexaèdre ou le cube; 5° le dodécaèdre; car s'il existait un sixième polyèdre régulier, il existerait aussi une sixième manière de partager la sphère en parties égales (589).

573. Soient

a = le côté du polygone sphérique;
A = l'angle du polygone sphérique;
c = la corde de l'arc a, ou le côté du polyèdre régulier inscrit;
r = rayon du cercle circonscrit à une face du polyèdre régulier;
R = rayon de la sphère circonscrite;
R′ = rayon de la sphère inscrite;
p = nombre de côtés de chaque polygone;
I = inclinaison des faces du polyèdre régulier.

On aura
$$c = 2R \sin. \tfrac{1}{2} a$$
$$R'^2 = R^2 - r^2$$
$$\sin. \tfrac{1}{2} I = \frac{R'}{R \cos. \tfrac{1}{2} a}$$

$$r = \frac{R \sin. \frac{1}{2} a}{\sin. \frac{180^\circ}{p}}.$$

Deux côtés adjacens c du polyèdre, et le rayon R, forment un angle trièdre dans lequel on connaît l'angle plan (c, c) formé par les deux côtés, et l'angle dièdre A opposé à l'angle (c, c); de plus, le rayon R fait des angles égaux avec chacun des côtés : on a donc (421)

$$\cos. c, c = (\cos. c, R)^2 + (\sin. c, R)^2 \cos. A;$$
$$\cos. c, c = 1 - \sin. c, R^2 + \sin. (c, R)^2 \cos. A;$$

d'où $\sin. (c, R)^2 = \dfrac{1 - \cos. c, c}{1 - \cos. A} = \dfrac{\sin.^2 \frac{1}{2} c, c}{\sin.^2 \frac{1}{2} A}$;

$$\sin. c, R = \frac{\sin. \frac{1}{2} c, c}{\sin. \frac{1}{2} A};$$

or $\quad 2 \text{ angle } c, R + a = 180^\circ;$

d'où $\quad \text{angle } c, R = 90^\circ - \frac{1}{2} a;$

$$\sin. c, R = \cos. \frac{1}{2} a;$$

or, $\quad \frac{1}{2} cc + \dfrac{180^\circ}{p} = 90^\circ;$

d'où $\quad \sin. \frac{1}{2} c, c = \cos. \dfrac{180^\circ}{p};$

ainsi, $\quad \cos. \frac{1}{2} a = \dfrac{\cos. \frac{180^\circ}{p}}{\sin. \frac{1}{2} A};$

l'on a $\quad R'^2 = R^2 - \dfrac{R^2 \sin.^2 \frac{1}{2} a}{\sin.^2 \frac{180^\circ}{p}} =$

$$=R\frac{\left(\sin.^2\frac{180°}{p}-\sin.^2\frac{1}{2}a\right)}{\sin.^2\frac{180°}{p}}=$$

$$=R^2\frac{\left(\sin.^2\frac{180°}{p}-1+\cos.^2\frac{1}{2}a\right)}{\sin.^2\frac{180°}{p}};$$

$$R'^2=R^2\frac{\left(\cos.^2\frac{1}{2}a-\cos.^2\frac{180°}{p}\right)}{\sin.^2\frac{180°}{p}}=$$

$$=R^2\frac{\dfrac{\left(\cos.^2\frac{180°}{p}-\cos.^2\frac{180°}{p}\right)}{\sin.^2\frac{1}{2}A}}{\sin.^2\frac{180°}{p}};$$

$$\frac{R'^2}{R^2}=\frac{\cos.^2\frac{180°}{p}(1-\sin.^2\frac{1}{2}A)}{\sin.^2\quad\frac{180°}{p}\sin.^2\frac{1}{2}A}=$$

$$=\frac{\cot.^2\frac{180°}{p}\cos.^2\frac{1}{2}A}{\sin.^2\frac{1}{2}A}=\cot.^2\frac{180°}{p}.\cot.^2\frac{1}{2}A;$$

$$\frac{R'}{R}=\cot.\frac{180°}{p}\cot.\frac{1}{2}A;$$

$$\frac{R}{R'}=\text{tang.}\frac{180°}{p}\text{tang.}\frac{1}{2}A;$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}I=\frac{R'}{R\cos.\tfrac{1}{2}a}=\frac{\cot.\dfrac{180^\circ}{p}\cot.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}A}{\cos.\dfrac{180^\circ}{p}}=$$

$$=\frac{\cos.\tfrac{1}{2}A}{\sin.\dfrac{180^\circ}{p}}.$$

A l'aide de ces formules, on est en état de calculer en parties du rayon de la sphère, toutes les lignes, surfaces, angles, qu'on rencontre dans les cinq corps réguliers; on en a souvent besoin dans la théorie de la cristallisation. (Voir Note 19.)

Sur les polyèdres en général.

574. Dans un polyèdre régulier, on ne rencontre que des polygones réguliers d'une même espèce; mais on peut aussi construire des polyèdres avec des polygones réguliers, de plusieurs espèces différentes; par exemple, un polyèdre dont chaque angle solide est formé par des triangles équilatéraux et des carrés, en égal nombre et semblablement disposés : nous ne nous arrêterons pas à étudier ces polyèdres, sur lesquels il est pourtant utile de s'exercer, mais nous allons donner quelques théorêmes sur les polyèdres en général.

575. Soient F le nombre des faces;
S le nombre des angles solides;
A le nombre des arêtes.

Je dis que F + S — A est un nombre constant dans tous les polyèdres; en effet suppo-

sons qu'il survienne un nouveau sommet, et qu'on mène des arêtes aux angles d'une face, que, pour fixer les idées, nous supposons être un pentagone. On formera un nouveau polyèdre, dans lequel la face pentagonale est remplacée par 5 faces triangulaires; il y a donc 4 faces de plus, et S est augmenté de 1 : donc F+S est augmenté de 5, mais le nombre A des arêtes augmente aussi de 5 : donc F+S—A n'a pas changé. Il peut arriver qu'une face triangulaire soit dans le même plan qu'une face du premier polyèdre; dans ce cas, F n'augmente que de 3; mais aussi une arête du premier polyèdre disparaît : par conséquent A n'augmente que de 4; si 2 faces triangulaires sont les prolongemens de deux plans du premier polyèdre, alors F n'augmente que de 2; mais, dans ce cas, deux arêtes du premier polyèdre disparaissent, et A n'augmente que de 3, et ainsi de suite : donc, etc. Or, lorsque le polyèdre est un tétraèdre, l'on a évidemment $F+S-A=2$: donc, cette équation a lieu pour tous les polyèdres.

La même manière de démontrer peut s'appliquer à la proposition de M. Cauchy (pag. 229).

576. Soient

t le nombre de triangles
q le nombre de quadrilatères
p le nombre de pentagones
h le nombre d'hexaèdres
e le nombre d'heptaèdres, etc.,
} d'un polyèdre;

on aura $A=\frac{1}{2}(3t+4q+5p+6h+7e\ldots)$; or, A est essentiellement entier : il faut donc que dans tout polyèdre, $3t+5p+7e\ldots$ soient un nombre pair.

Il ne peut donc exister de polyèdre qui ait un nombre impair de faces polygonales, ayant chacune un nombre impair de côtés.

577. La somme de tous les angles plans du polyèdre est évidemment égale à

$$(2t+4q+6p+8h+10e\ldots)\,90^\circ;$$

or $4A=6t+8q+10p+12h+14e\ldots;$

$$4F=4t+4q+4p+4h+4e\ldots;$$

$$4A-4F=2t+4q+6p+8h+10e\ldots;$$

donc, la somme de tous les angles plans est égale à $(4A-4F)\,90^\circ$;

et $$4A-4F=4(S-2)=4S-8;$$

donc cette somme est aussi égale à $(4S-8)$ 90°.

Ainsi, dans les polyèdres comme dans les polygones, la somme des angles plans est déterminée par le nombre des sommets.

On a encore trouvé d'autres rapports entre les côtés, les angles, les faces d'un polyèdre; les principaux sont dus à Euler, qui s'en est occupé le premier.

Sphère et Cylindre.

578. (*Fig.* 122.) Lorsqu'un cylindre est circonscrit à une sphère, les plans tangens à la première surface sont aussi tangens à la seconde; mais dans la sphère, les plans tangens sont perpendiculaires aux rayons : donc les rayons qui vont aux points de contact sont perpendiculaires aux arêtes du cylindre; donc tout cylindre circonscrit à une sphère est droit, et la touche suivant un grand cercle.

579. (*Fig.* 122.) Soit AB le grand cercle de contact; et CD, EF les deux bases du cylindre tangent à la sphère; désignons par
$R =$ le rayon de la sphère;
$S =$ aire de la sphère;
$T =$ aire totale du cylindre;
$T' =$ aire convexe du cylindre;
$V =$ solidité de la sphère;
$U =$ solidité du cylindre;
on aura $S = 4\pi R^2$;

$$T' = CE.\ \text{circ.}\ DC = 2R \cdot 2\pi R = 4\pi R^2;$$
$$T = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2;$$
$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3;$$
$$U = 2\pi R^3;$$

d'où
$$S = T';$$
$$\frac{S}{T} = \tfrac{2}{3};$$
$$\frac{V}{U} = \tfrac{2}{3};$$
et
$$\frac{S}{T} = \frac{V}{U}.$$

Ces beaux rapports ont été découverts par Archimède; on les avait fait sculpter avec la figure géométrique, sur le monument sépulcral de ce grand homme.

580. Toute surface cylindrique rencontre la sphère suivant deux lignes symétriques; car les portions d'arêtes interceptées dans la sphère étant des cordes parallèles, le plan mené par le centre, perpendiculairement à ces cordes, les coupe en deux parties égales : donc la ligne de sortie est symétrique à la ligne d'entrée. Par conséquent, si la ligne d'entrée est un cercle, la ligne de sortie est un cercle égal

et également incliné sur le plan de symétrie; si la ligne d'entrée est un grand cercle, la ligne de sortie est un grand cercle; elles coupent le plan de symétrie, suivant la même droite.

581. (*Fig.* 123.) Le cylindre CK'DBAK étant circonscrit aux deux sphères égales O, P, si l'on mène un plan tangent RMR', commun aux sphères, et perpendiculaire au plan ABCD, il coupera le cylindre suivant une ellipse RMR'NR, et les points de contact F et F' en sont les foyers. En effet, par un point M quelconque pris sur cette courbe soient menées les droites MF, MF', et l'arête KMK' rencontrant les cercles de contact en K et K', les droites MF et MK sont tangentes à la sphère O: donc MF = MK; les droites MF', MK' sont tangentes à la sphère P: donc MF' = MK'. Ainsi MF + MF' = MK + MK' = KK' = AC: donc, quelque part qu'on prenne la somme des rayons vecteurs MF + M'F' elle est constamment égale à AC: donc la courbe d'intersection est une ellipse. Le grand axe RR' = AC, et la distance focale RF est égale à AR.

582. Un cylindre circulaire droit étant coupé par un plan oblique à la base, la section est une ellipse; car on peut toujours concevoir deux sphères qui touchent le cylindre et le plan; le reste du raisonnement est le même que dans le numéro précédent.

Sphère et Cône.

583. (*Fig.* 124.) Le cône SAB touche la sphère suivant le petit cercle AB; menons des

plans tangens LMN, OPQ parallèles au plan du petit cercle; soient

$$LM = AL = r,$$
$$OP = OA = r',$$
$$MP = 2R = D;$$
$$S = \text{aire de la sphère},$$
$$V = \text{solidité de la sphère},$$
$$T' = \text{aire convexe du cône},$$
$$U = \text{solidité du cône},$$
$$T' = \pi\,(r+r')^2$$

et
$$\frac{T'}{S} = \frac{(r+r')^2}{D^2} = \frac{OL^2}{MP^2}$$

Ainsi, l'aire du cône tronqué est à celle de la sphère comme le côté du cône est au diamètre de la sphère.

Menons LV perpendiculaire sur OQ, on aura
$$OL^2 = VL^2 + OV^2,$$
$$(r+r')^2 = D^2 + (r-r')^2;$$
d'où
$$4\,rr' = D^2,$$
et
$$T' - S = \pi\,(r+r')^2 - 4\,\pi\,D^2 =$$
$$= \pi\,(r^2 + 2rr' + r'^2 - D^2) = \pi\,(r^2 - 2rr' + r') =$$
$$= \pi\,(r-r')^2.$$

La différence entre les aires du tronc conique et de la sphère est égale à l'aire du cercle qui aurait pour rayon la différence des rayons $r-r'$, ou OX. On a

$$U = \tfrac{1}{3}\,\pi\,D\,(r^2 + 5^2 + rr'),$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi\,D\,((r-r')^2 + 3rr') = \tfrac{1}{3}\,\pi\,D\left((r-r')^2 + \frac{3D^2}{4}\right)$$
$$= \frac{\pi D^3}{4} + \tfrac{1}{3}\,\pi\,D\,(r-r')^2;$$

d'où
$$\tfrac{3}{2}\,V=\frac{\pi D^3}{4}$$
$$U-\tfrac{3}{2}\,V=\tfrac{1}{3}\pi D(r-r')^2.$$

La différence entre U et $\frac{3}{2}$ V est donc égale à la solidité du cône engendré par le triangle LOV, tournant autour de LV.

Lorsque OV devient nul, le cône tronqué se change en cylindre, et on retrouve les propriétés d'Archimède (579).

584. (*Fig.* 125.) Un cône S rencontre la sphère O suivant un cercle AB; il sortira de la sphère en la coupant suivant un cercle CD. En effet, soient menés le plan diamétral SABCDO, perpendiculaire au plan AB, et le plan polaire PQ, les plans AB, PQ se coupent suivant une droite perpendiculaire au plan SCD; par S et par cette droite on mène un troisième plan; toutes les sécantes SAGC, SBHD, comprises entre ces plans et la sphère, sont coupées harmoniquement (238). Or, les points tels que A sont situés sur un même plan; les points tels que G sont sur un même plan; donc les points C, D sont aussi sur un plan (409). Par conséquent la section CD est un cercle; les plans des trois cercles CD, PQ, AB passent par la même droite, et sont perpendiculaires au plan qui passe par l'axe SO et la hauteur du cône.

585. Il s'ensuit que dans tout cône oblique CD à base circulaire, on peut faire une section circulaire, non parallèle à la base Il suffit de mener par l'axe et la hauteur du cône un plan qui coupera la base suivant le diamètre CD; par C et D on fera passer une sphère quelconque, qui rencontre SC, SD en

A et B; par AB on conduit un plan perpendiculaire à SCD : elle donne une section circulaire (584).

A chaque circonférence passant par CD répond une autre droite AB; mais toutes ces droites sont parallèles : par conséquent les plans de section sont aussi parallèles.

Les sections AB, CD sont dites *sections antiparallèles*; cette dénomination provient de ce que AB coupe les droites SC, SD proportionnellement, mais en rapport inverse; car l'on a SA : SB :: SD : SC. Si le rapport était direct, les droites AB et CD seraient parallèles.

586. (*Fig.* 125 *bis.*) Lorsque la circonférence ABCD vient à passer par le point S, la section AB devient nulle; mais le plan AB devient tangent, passe par le sommet, et sera perpendiculaire au rayon SO : donc lorsqu'un cône a son sommet S et sa base circulaire CD sur la même sphère, toute section dans le cône perpendiculaire au rayon SO est un cercle.

Sections coniques.

587. (*Fig.* 126.) Un cône droit SAB étant coupé par un plan RMR′, qui n'est parallèle à aucune arête, et qui est perpendiculaire au plan SAB, la section est une ellipse. En effet, soient construites deux sphères O, P tangentes au cône et au plan coupant, on prouvera, comme au numéro 581, que la somme des rayons vecteurs MF + MF′ est constamment égale à KK′ ou au côté CA : donc la courbe est une ellipse. Toutes les sections parallèles à RMR′ donnent des ellipses semblables, qui

deviennent de plus en plus petites, en se rapprochant du sommet où elles se réduisent à un point. L'intersection des plans de contact AB, CD avec le plan de l'ellipse donne les deux directrices de cette courbe. Nous allons le faire voir d'abord pour la parabole.

588. (*Fig.* 127.) Lorsque le plan coupant R'RM est parallèle à un élément SC du cône, la section est une parabole. En effet, dans ce cas, il n'existe qu'une seule sphère P, qui touche en même temps le plan coupant en F' et le cône en CD. Soit T'' la droite suivant laquelle le plan coupant rencontre le plan CD, cette droite perpendiculaire au plan DT'F', et par conséquent à la droite T'F' se projette en T'; M étant un point de la courbe, menons l'arête MK'S, le rayon vecteur MF' et la droite MU', parallèle à T'F'; elle sera aussi parallèle à SC; les droites SC, SK'M, MU' sont dans un même plan; mais CK' étant dans le plan de contact CD, et MU' dans le plan coupant, ces deux droites se rencontrent sur le point U' de l'intersection T'X de ces deux plans. Or, les deux triangles SK'C, U'K'M sont semblables; SK'C étant isocèle, U'K'M l'est aussi: donc MU'=MK'; mais MK'=MF': donc MU'=MF'. Tous les points de la courbe RMR sont donc également distans d'un point fixe F' et d'une droite fixe; la courbe est donc une parabole (page 80); à mesure que son plan approche du sommet, elle se rétrécit, et au sommet même elle se réduit à une droite.

589. (*Fig.* 126.) Lorsque T'F' n'est pas parallèle à SC, alors MU' ne sera non plus parallèle à SC; mais si l'on prolonge MK' jusqu'à ce qu'elle rencontre la seconde ligne de contact AB

en K, et la droite MU' jusqu'à ce qu'elle coupe TX et T'X'; les deux triangles U'MK', UMK étant semblables, donnent

$$MK' : MK :: MU' : MU ;$$

d'où $MK'+MK : MU'+MU :: MK' : MU'$.

$$KK' : UU' :: MK' : MU'.$$

Or, les deux premiers termes sont constans : donc le rapport $\frac{MK'}{MU'}$ ou $\frac{MF'}{MU'}$ est constant : donc T'X' est une directrice, et TX est la seconde directrice de l'ellipse.

590. (*Fig.* 128.) Lorsque le plan coupant est parallèle à deux élémens du cône, il y a une section dans chaque nappe de la surface ; ce sont les deux branches d'une hyperbole ; car l'on a alors

$MF' - MF = MK' - MK = KK'$ (271). La différence des rayons vecteurs étant constante, la courbe est une hyperbole ; à mesure que l'hyperbole s'approche du sommet elle se rétrécit, et au sommet elle se réduit à deux droites.

591. On voit, d'après ce qui précède, que l'ellipse, la parabole, l'hyperbole, s'obtiennent en coupant un cône par un plan ; c'est ce qui leur a fait donner, par les anciens, la dénomination de *sections coniques*, dénomination qui est trop exclusive ; car il existe encore beaucoup d'autres surfaces sur lesquelles on peut tracer l'une quelconque des trois courbes. Ainsi, nons avons vu que l'ellipse est aussi une section cylindrique. Les démonstrations que nous avons données pour le cône s'appliquent aux sections de l'hyperboloïde de révolution par un plan, et conduisent aux mêmes résultats ;

c'est même de cette manière que M. Dandelin, officier du génie belge, a le premier démontré les propriétés des sections coniques, en les considérant comme situées sur l'hyperboloïde de révolution.

592. Etant donné un cône droit, on peut toujours le couper par un plan, de manière à obtenir une courbe égale à une ellipse, ou à une parabole donnée; on peut toujours construire un cône droit qui ait une section plane égale à une hyperbole donnée; mais ce cône n'est pas quelconque (602).

Principales propriétés des sections coniques, démontrées à l'aide des propriétés du cercle, combinées avec celles des projections.

593. Soit un point fixe, que nous désignerons par la lettre P et sous le nom de *pôle*, et un plan fixe, que nous appellerons le *plan de projection;* la projection *angulaire* ou *conique* A′ d'un point A est le point où la droite AP coupe le plan de projection; de sorte que les trois points P, A, A′ sont sur une même droite PAA′, qu'on nomme *rayon projetant*, ou *rayon visuel.*

594. La projection angulaire d'une ligne sur un plan, c'est la réunion des projections angulaires de tous les points de cette ligne. Il est évident que les rayons projetans forment une surface conique dont le pôle est le sommet, et auquel la ligne donnée sert de directrice; la projection angulaire d'une ligne est donc l'intersection d'une surface conique par le plan de projection.

595. Il suit de là que, 1° la projection angulaire d'une droite est une droite; 2° la projection angulaire ou conique du point d'intersection des deux droites est à l'intersection des projections angulaires des deux droites; 3° la projection angulaire d'une droite est parallèle à la droite, lorsque celle-ci est parallèle au plan de projection; 4° la projection angulaire d'une droite qui passe par le pôle se réduit au point d'intersection de cette droite avec le plan de projection; 5° les projections angulaires d'un système de droites parallèles passent toutes par le point où la parallèle, passant par le pôle, rencontre le plan projetant; ce point est nommé *point de fuite* du système des droites parallèles; 6° lorsque des systèmes différens de droites parallèles sont situés dans un même plan, leurs points de fuite sont sur une même droite nommée *ligne de fuite*; 7° lorsqu'une droite est divisée harmoniquement, la projection angulaire de la droite est aussi divisée harmoniquement; 8° la projection angulaire d'une tangente à une ligne est la tangente à la projection angulaire de cette ligne; 9° deux lignes convergentes peuvent être considérées comme les projections coniques de deux droites parallèles; et par conséquent un quadrilatère quelconque peut être considéré comme la projection d'un parallélogramme.

Les réciproques ont lieu.

596. Il y a aussi réciprocité entre une figure plane A et sa projection angulaire A′; car en conservant le même pôle, et prenant le plan de la figure A pour celui de projection, elle devient la projection angulaire de A′.

597. Toute section conique peut être considérée comme la projection angulaire d'un cercle, et réciproquement; car on peut tracer la section conique et le cercle donné sur le même cône droit (592); prenant le sommet pour pôle, et le plan d'une de ces figures pour plan de projection, l'autre en devient la projection angulaire.

598. Une section conique ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points; car ces points sont les projections angulaires de l'intersection d'une droite avec un cercle. C'est à raison de cette propriété que chez les modernes on a donné aux sections coniques le nom de *courbes du deuxième degré*.

599. Par un point donné sur une section conique on ne peut mener qu'une seule tangente, et d'un point donné hors de la section on ne peut mener que deux tangentes à la courbe.

600. (*Fig.* 129.) Les propriétés polaires du cercle, énoncées (243), appartiennent aux courbes du second degré. Ainsi, si du point O situé dans le plan d'une de ces courbes, on mène des sécantes OLK, OL′K′, OL″K″, les intersections I, I′, I″, I‴ sont sur une même droite M′II′I″.... M; et les sécantes extrêmes OM′, OM sont tangentes, et la droite MM′ est la polaire relativement au pôle O; car toutes ces lignes et ces points peuvent être considérés comme les projections angulaires de lignes et de points analogues situés dans un cercle. Or, les points du cercle projetés en I, I′, I″ sont sur une droite: donc aussi I, I′, I″.. sont sur une droite, et la po-

laire divise les sécantes harmoniquement en R, R'.

On tire de là un moyen facile de mener une tangente à une courbe du second degré par un point non situé sur la courbe.

601. Lorsque le pôle O s'éloigne à l'infini, les sécantes deviennent parallèles et les points R, R', R'' sont alors les milieux des cordes LK, L'K'...; donc, dans toute courbe du second degré, les milieux d'un système de cordes parallèles sont situés sur une même droite, appelée *diamètre de la courbe;* et réciproquement, le pôle d'un diamètre est situé à l'infini. On peut aussi démontrer cette propriété directement; en considérant un système de cordes parallèles comme la projection angulaire d'un système de cordes convergeant vers un point dans le cercle, vers leur point de fuite sur le plan du cercle, et le diamètre de la conique est alors la projection de la polaire du point de fuite dans le cercle; pour chaque système de cordes parallèles dans la conique, il y a un autre point de fuite dans le plan du cercle; mais tous ces points sont sur une même droite (595); donc toutes les polaires des points de fuite passent par un même point; donc aussi, dans le plan de la conique, tous les diamètres passent par un même point appelé *centre*. Par exemple, dans la figure 126, pour avoir le centre de l'ellipse RMR', il faut mener par le pôle S un plan parallèle à celui de l'ellipse, qui coupera le plan du cercle CD suivant une droite Z située hors du cercle CD; le pôle de cette droite est dans l'intérieur du cercle; la projection angulaire de ce pôle sur le plan de l'ellipse en

est le centre, qui est par conséquent dans l'intérieur de l'ellipse, et toutes les sections parallèles ont leur centre situé sur la même droite qui passe par le sommet. Dans la figure 127, la droite Z est tangente au cercle CD; le pôle est sur la circonférence, en D; la droite SD est parallèle au plan de la section : donc, dans la parabole, le centre est à l'infini, c'est-à-dire que tous les diamètres sont parallèles. Dans la figure 128, la droite Z coupe la circonférence : donc le pôle est hors du cercle; par conséquent, le centre de l'hyperbole est hors de la courbe.

Il est facile de voir que la directrice est la polaire du foyer voisin.

602. Dans l'ellipse, le centre étant dans l'intérieur, tous les diamètres rencontrent la courbe en deux points; et le centre est au milieu de chaque diamètre.

Dans l'hyperbole, le centre étant hors de la courbe, il y a des diamètres qui rencontrent la courbe, et d'autres qui ne la rencontrent pas. En effet, l'hyperbole est la section du cône par un plan parallèle à deux arêtes; menant par l'une et l'autre arête un plan tangent au cône, ces plans rencontrent le plan de la section hyperbolique, suivant deux droites qui renferment l'hyperbole dans leur angle; cette courbe, de même que le cône, s'ouvre davantage, s'approche de plus en plus de ces deux droites, mais ne peut jamais en être atteinte; de plus, chacun de ces plans tangens contient le centre de la courbe (601) : donc les deux droites passent par le centre et sont des diamètres. On a donné à ces diamètres, qui approchent sans cesse de la courbe

sans pouvoir la couper, le nom d'*asymptotes*; elles forment, en se coupant, quatre angles : deux opposés renferment les branches de la courbe; tous les diamètres situés dans ces angles rencontrent la courbe en deux points situés sur les branches opposées, et également éloignés du centre.

L'angle du cône est donc plus petit que celui des deux asymptotes; on ne peut donc tracer sur un cône donné des hyperboles dont les asymptotes forment un angle plus petit que celui du cône.

Les diamètres situés dans les deux autres angles ne rencontrent pas la courbe; les diamètres qui rencontrent la courbe passent par les milieux d'un système de cordes parallèles, dont chacune a ses extrémités sur la même branche; les diamètres qui ne rencontrent pas la courbe passent par les milieux des cordes parallèles, qui vont d'une branche à l'autre.

603. Les propriétés de l'hexagone inscrit et circonscrit dans le cercle (367) ont également lieu dans les sections coniques; car ces polygones peuvent être considérés comme les projections coniques de polygones correspondans dans le cercle ; ces propriétés vont nous servir à résoudre les problèmes suivans :

604. Problème CVI. Étant donnés les cinq points A, B, C, D, E, appartenant à une ligne du second degré, mener au point A une tangente à cette ligne?

Solution. Désignez la droite AB par 1 ; BC par 2; CD par 3 ; DE par 4; EA par 5, et la tangente cherchée par 6; cherchez les points

d'intersection de 1 avec 4, et de 2 avec 5; joignez les deux points trouvés par une droite; cherchez le point d'intersection de cette droite avec 3; par ce point et par A, menez une droite, ce sera la tangente 6 demandée. De quelque manière qu'on varie les constructions, on trouvera toujours la même tangente (604).

605. Problème CVII. Étant donnés cinq points A, B, C, D, E, d'une section conique, trouver tant d'autres points qu'on voudra?

Solution. Par le point E, menez une droite quelconque EF; il s'agit de trouver le point F où cette droite rencontre la courbe; désignons AB, BC, CD, DE, EF, FA par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6; cherchez les intersections de 1 avec 4, et de 2 avec 5; joignez ces deux points d'intersection par une droite; cherchez l'intersection de cette droite avec 3; joignez ce point et le point A par une droite: ce sera la ligne 6; l'intersection de 5 et de 6 donne le point F cherché.

606. De quelque manière qu'on varie la construction, en plaçant arbitrairement les lettres A, B, C, D, E, on obtiendra toujours le même point F; de là on conclut que par cinq points donnés, on ne peut faire passer qu'une seule section conique; si en réunissant les cinq points de toutes les manières possibles, on ne peut former aucun polygone convexe, la courbe sera nécessairement une hyperbole.

607. Problème CVIII. Étant donnés cinq points A, B, C, D, E d'une section conique, trouver le centre, s'il y a lieu?

Solution. Par le point A menez une tangente (Problème CVI); par le point B menez une pa-

rallèle à cette tangente; cherchez par le problème précédent le point K où cette parallèle rencontre la courbe; par A et par le milieu BK, menez une droite : ce sera leur diamètre; cherchez le second point I où ce diamètre coupe la courbe; le milieu de AI sera le centre demandé. Si le point I est à l'infini, la courbe est une parabole.

608. PROBLÈME CIX. Étant donnés cinq points d'une conique, déterminer l'espèce de la courbe qui passe par ces points?

Solution. Formez, s'il est possible, un polygone convexe avec les cinq points; cherchez le centre (PROB. CVIII); s'il tombe dans l'intérieur du polygone, la courbe est une ellipse; s'il tombe dehors, la courbe est une hyperbole, et tous les points sont situés sur la même branche; si le centre est à l'infini, la courbe est une parabole.

Au cas qu'il ne soit pas possible de former un pentagone convexe avec les points donnés, la courbe est toujours une hyperbole, et les points sont distribués sur les deux branches.

Si trois points sont en ligne droite, alors on obtient deux droites qui sont les limites d'une hyperbole, lorsqu'elles sont convergentes; ou d'une parabole lorsque les droites sont parallèles.

La solution des quatre derniers problèmes n'exige d'autres instrumens que la règle. (Note 27.)

Projections cylindriques.

609. Lorsque le sommet du cône projetant est à l'infini, la surface devient cylindrique et tous les rayons projetés sont parallèles; la projection cylindrique d'une ligne sur un plan n'est autre chose que la section que fait ce plan dans le cylindre qui passe par la ligne donnée; la projection est *oblique* lorsque l'arête du cylindre est inclinée sur le plan de projection; la projection est *droite ou orthogonale*, lorsque l'arête du cylindre est perpendiculaire au plan de projection; cette dernière espèce de projection est la plus usitée: de sorte que lorsqu'on parle de projection d'un point, d'une ligne, sans aucune dénomination spéciale, on entend toujours la projection cylindrique orthogonale.

Dans la figure 123, AKB est la projection orthogonale de l'ellipse RR′ sur le plan de la base du cylindre.

Calcul appliqué aux projections angulaires ou coniques des lignes; propriétés des segmens.

610. (*Fig.* 130.) Soit AKGD un polygone quelconque; pour abréger, nous supposons que c'est un quadrilatère; et B, C, E, F, H, I, L, M, des points en nombre quelconque pris sur ces côtés; et S un point pris hors du plan du polygone; menons les rayons SA, SB, SC, SD, et prolongeons-les jusqu'à ce qu'ils coupent un second plan quelconque en A′, B′, C′, D′...;

le polygone A′, D′, G′, K′ sera la projection conique de ADGK sur le second plan. On aura

$$\text{Triangle } SAB = \tfrac{1}{2} SA . SB . \sin . SAB$$
$$SAC = \tfrac{1}{2} SA . SC . \sin . SAC$$
$$SDC = \tfrac{1}{2} SC . SD . \sin . SCD$$
$$SDB = \tfrac{1}{2} SD . SC . \sin . SDB;$$

d'où l'on tire $\dfrac{SAB \times SAC}{SDC \times SBD} =$

$$= \frac{SA^2 . \sin . SAB . \sin . SAC}{SD^2 . \sin . SCD . \sin . SDB} = \frac{AB \times AC}{DC \times DB};$$

car
$$\frac{SAB}{SDC} = \frac{AB}{DC}$$
$$\frac{SAC}{SDB} = \frac{AC}{DB}$$

On a de même $\frac{SD^2 . \sin. SDE . \sin. SDF}{SG^2 . \sin. SGF . \sin. SGE} = \frac{DE . DF}{GF \times GE}$,

et ainsi de suite. Multipliant ces équations ensemble, on obtient

$$\frac{AB \times AC \times DE \times DF \times GH \times GI \times KL \times KM}{DC \times DB \times GF \times GE \times KH \times KI \times AL \times AM} =$$

$$= \frac{\sin. SAB \times \sin. SAC \times \sin. SDE \times \sin. SDF \times \sin. SGH \times \sin. SGI . \sin. SKL . \sin. SKM}{\sin. SDC \times \sin. SDB . \sin. SGN . \sin. SGE . \sin. SKH \times \sin. SKI \times \sin. SAL \times \sin. SAM}.$$

Remplaçant A par A′, B par B′, etc., on aura même résultat pour le polygone A′D′G′K′; mais les angles SA′B′, SA′C′, SD′C′, etc., sont les mêmes que les angles SAB, SAC, SDC : donc l'on a

$$\frac{AB.AC.DE.DF.GH.GI.KL.KM}{DB.DC.GE.GF.KH.KI.AM.AL} = \frac{A'B'.A'C'.D'E'.G'H'.G'I'.K'L'.K'M'}{D'B'.D'C'.G'E'.G'F'.K'H'.K'I'.A'M'.A'L'} (M).$$

Cette équation subsiste lors même que les points A, B, C, D, E ne sont pas dans un même plan. (Voir Note 20.)

611. (*Fig.* 130.) Supposons qu'une section conique passe par les points B', C', E', F', H', I', L', M'; on pourra regarder cette section conique comme la projection conique d'un cercle passant par les points B, C, D, E, F, H, I, L, M; mais, dans ce cas, le premier membre de l'équation (M) se réduit à l'unité;

car, $$\frac{AB.AC}{AM.AL}=1;$$
$$\frac{DE\times DF}{DC\;.\;DB}=1, \text{etc.}$$

Donc le second membre est aussi égal à l'unité, dans une section conique quelconque; cette relation est désignée sous le nom de *propriété des segmens.* On la doit au célèbre Carnot.

612. Si KL = AM, on a aussi KM = AL; et alors on a

$$\frac{AB.AC.DE.DF.GH.GI}{DB.DC.GE.GF.KH.KI}=1\;(M);$$

si on a KL = AM = AB = KI;

alors $$\frac{AC.DE.DF.GH.GI}{DB.DC.GE.GF.KH}=1.$$

613. (*Fig.* 131.) Si les côtés du polygone deviennent des tangentes à la section conique, comme dans la *fig.* 131, alors AL = AM; KL = KM; AB = AC; DB = DC, etc., et la relation (M) devient

$$\frac{AB^2.DE^2.GH^2.KL^2}{DB^2.DE^2.KH^2.AL^2}=1;$$

d'où $$\frac{AB.DE.GH.KL}{DB.GE.KH.AL}=1.$$

614. (*Fig.* 131.) Lorsque le polygone est un quadrilatère circonscrit, les deux diagonales se coupent au même point O que les diagonales du quadrilatère inscrit BFHL. En effet, la proposition est évidente lorsque la section conique est un cercle, et que le quadrilatère inscrit est un parallélogramme, et nécessairement un rectangle; or, tout quadrilatère inscrit dans une section conique peut être regardé comme la projection angulaire d'un parallélogramme inscrit dans un cercle.

Cette même considération sert à démontrer que les quatre points de rencontre des côtés respectivement opposés dans le quadrilatère inscrit et circonscrit sont harmoniquement placés sur une même droite.

615. (*fig.* 130.) Appliquant la relation générale (M) au triangle ODG, on obtient

$$\frac{OB.OC.DE.DF.GH.GI}{DC.DB.GF.GE.OI.OH}=1;$$

si l'on a OB. OG = OI. OH (1),
alors la relation (M) se change en celle-ci:

$$\frac{DE.DF.GH.GI}{DC.DB.GF.GE}=1;$$

ou bien $$\frac{DC.DB}{DE.DF}=\frac{GH.GI}{GF.GE}\ (2).$$

L'équation (1) a lieu dans deux cas:

1° Lorsque l'angle CBI est supplément de l'angle opposé CHI, les quatre points C, B, H, I étant alors sur la même circonférence, on a par la propriété des sécantes OB. OC = OI. OH;

2° Lorsque l'angle CBI est supplément de l'adjacent HIB, HI étant parallèle à CB, les

distances OB, OC, OI, OH deviennent infinies et égales.

D'ailleurs, on peut démontrer cette même proposition directement.

A l'aide des propriétés des segmens il est aussi facile à démontrer que les trois droites qui vont dans un triangle circonscrit, des sommets aux points de contact respectivement opposés, se coupent en un même point.

Ellipse; son équation; aire.

616. (*Fig.* 131 *bis.*) Soient BC, IH deux cordes parallèles inscrites dans une ellipse, et EDGF le diamètre qui passe par leurs milieux, et qu'on nomme *diamètre conjugué aux cordes*, on aura, par la propriété des segmens,

$$\frac{DB \cdot DC}{DE \cdot DF} = \frac{GH \cdot GI}{GF \cdot GE},$$

ou bien
$$\frac{DB^2}{DE \cdot DF} = \frac{GI^2}{GF \cdot GE}.$$

Cette proportion s'énonce ainsi : dans l'ellipse, les carrés des cordes parallèles sont entre eux comme les produits des segmens qu'elles font sur le diamètre conjugué.

617. Par le centre O, menons le diamètre MON parallèle à BD; on aura

$$BD^2 : OM^2 :: DE. DF : OE^2.$$

Soient $OE = a$,
$OM = b$,
$OD = x$,
$DE = a - x$,
$DF = a + x$,
$DB = y$;

la proportion s'écrit donc ainsi :

$$y^2 : b^2 :: (a-x)(a+x) : a^2;$$

d'où $$a^2 y^2 = b^2 (a^2 - x^2).$$

Cette équation est nommée *équation de l'ellipse* rapportée à son centre, et aux deux diamètres MN, EF qui sont dits *conjugués* l'un à l'autre, parce que chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes menées parallèlement à l'autre; en effet, menons BI parallèle à EF,

on aura $BR.RI : EO^2 :: MR.RN : MO^2$;

ou bien $BR.RI : EO^2 :: MO^2 - OR^2 : MO^2$;

$BR.RI : EO^2 :: MO^2 - BD^2 : MO^2$;

d'où $EO^2 - BR.RI : EO^2 :: BD^2 : MO^2 ::$

$:: EO^2 - OD^2 : EO^2 :: EO^2 - BR^2 : EO^2$;

donc $$BR.RI = BR^2;$$

et $$BR = RI.$$

618. (*Figure* 132.) Ainsi, connaissant de grandeur et de position deux diamètres conjugués $2a$ et $2b$ de l'ellipse, on peut construire tous les points de la courbe à l'aide de son équation. Soient MN, EF les deux diamètres conjugués, que nous supposons perpendiculaires, alors EF est le grand axe, et MN le petit axe de l'ellipse; les quatre points E, M, F, N, appartiennent à la courbe et en sont les *sommets*; pour en trouver encore d'autres, décrivez sur les axes, comme diamètres, des circonférences de cercle; menez un rayon OR, qui coupe la petite circonférence en S; abaissez la perpendiculaire RP, et menez la parallèle SM' à EF, le point M' appartient à l'ellipse; en effet, l'on a

$$M'P^2 : RP^2 :: OS^2 : OR^2 :: OM^2 : OE^2;$$

ou bien $M'P^2 : EP.PF :: OM^2 : OE^2$;

donc M' est sur l'ellipse (617).

Si les diamètres conjugués n'étaient pas à angle droit, on ferait encore la même construction; on donnerait à PM′ une inclinaison M′PF égale à celle des diamètres.

619. (*Fig.* 132.) R, R′ étant deux points du cercle, et M′, M″ les points correspondans de l'ellipse, il est facile de voir que les cordes RR′, M′M″ rencontrent l'axe EF en un même point; d'où l'on conclut que la tangente RI au cercle, et la tangente M′T à l'ellipse, coupent l'axe en un même point T: on a donc ici un moyen simple de mener une tangente à l'ellipse.

Parabole; son équation.

620. (*Fig.* 133.) Soient BC, IH deux cordes parallèles, et EDG leur diamètre conjugué (616); il ne rencontre la courbe qu'en un point, l'autre point F (*fig.* 132) est situé à l'infini; le rapport EF à DF est égal à l'unité, et la propriété des segmens donne

$$\frac{BD^2}{GI^2}=\frac{ED}{EG}.$$

Les carrés des cordes sont proportionnels aux segmens faits sur le diamètre conjugué.

Soient données de grandeur et de position ED et BD; faisons

$$ED=m,$$
$$BD=n,$$
$$EG=x,$$
$$GI=y;$$

on aura
$$\frac{n^2}{y^2}=\frac{m}{x};$$

d'où
$$y=\frac{n^2x}{m}.$$

Équation de la parabole, qui peut servir à la construire par points ; à cet effet, prenez KE, de manière que l'on ait $m : n :: n :$ KE, et ensuite une moyenne proportionnelle entre EG et KE, vous aurez GI.

621. On a $GI^2 = \frac{n^2}{m} . EG$,

$$G'I'^2 = \frac{n^2}{m} . EG',$$

$$G'I'^2 - GI^2 = (G'I' - GI)(G'I' + GI) =$$

$$= \frac{n^2}{m} . GG'.$$

Menons la parallèle IR, on a

$$I'R : RI :: GI : GS ;$$

mais $I'R = I'G' - IG$

$RI = GG'$;

donc $G'I' - GI : GG' :: GI : GS ::$

$$:: \frac{n^2}{m} : GI + G'I' ;$$

d'où $$GS = \frac{GI(GI + G'I')}{\frac{n^2}{m}} ;$$

plus I' s'approche de I, et plus la sécante II'S s'approche de la tangente ; au point de contact I, $GI = G'I'$; et l'on a

$$GT = \frac{2GI^2}{\frac{n^2}{m}} = \frac{2 . \frac{n^2}{m} . EG}{\frac{n^2}{m}} = 2EG.$$

Ainsi, pour mener la tangente au point I, il suffit de porter EG de E en T, et de mener IT.

Hyperbole ; son équation.

622. (*Fig.* 134.) Soient BC, IH deux cordes parallèles dans une même branche de l'hyperbole, GDEF leur diamètre conjugué ; il rencontre la courbe en deux points E, F, et on aura

$$\overline{GI}^2 : \overline{BD}^2 : GE \times GF : DE \times DF.$$

Le diamètre XOY, conjugué à FE, ne rencontre pas la courbe ; regardons comme connues de position et de grandeur les lignes OE, OD, DB, et faisons

$$\begin{aligned} OE &= a, \\ OD &= m, \\ BD &= n, \\ OG &= x, \\ GI &= y, \\ GE &= x - a, \\ GF &= x + a; \end{aligned}$$

la proportion s'écrit donc ainsi :

$$y^2 : n^2 :: x^2 - a^2 : m^2 - a^2;$$

d'où $$y^2 = \frac{n^2}{m^2 - a^2}(x^2 - a^2).$$

Soit q une moyenne proportionnelle entre $m+a$ et $m-a$, on aura

$$q^2 = m^2 - a^2;$$

et $$y^2 = \frac{n^2}{q^2}(x^2 - a^2);$$

soit encore b une quatrième proportionnelle aux trois lignes q, n, a, de sorte que l'on ait

$$q : n :: a : b;$$

et $$\frac{n}{q} = \frac{b}{a};$$

d'où $$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Telle est l'équation de l'hyperbole rapportée au centre ; ici b est une ligne auxiliaire qui sert à donner à l'équation une forme analogue à celle de l'ellipse ; mais dans cette dernière courbe, l'axe b est donné par la courbe même, tandis que dans l'hyperbole, il est introduit par un artifice de calcul.

On a évidemment

$$y^2 < \frac{b^2x^2}{a^2}$$ ou

$$y^2 < \frac{bx}{a}$$

$$\frac{y}{x} < \frac{b}{a}$$

Si donc on prend un point k tel que le rapport de ses distances aux axes OX, OY soit égal à $\frac{b}{a}$, le point sera hors de l'hyperbole ; si en E on élève une perpendiculaire à OX et qu'on prenne de part et d'autre $ET = ET' = b$.

Les deux droites OT, OT' sont le lieu géométrique du point k ; à quelque distance qu'on prolonge ces droites, elles seront toujours hors de la courbe et ne peuvent la toucher qu'à l'infini. C'est ce qui leur a fait donner le nom d'*asymptotes* (602).

623. Pour construire l'hyperbole par points, décrivons sur EF, comme diamètre, une circonférence ; du point G, menant une tangente à cette circonférence, elle sera moyenne pro-

portionnelle entre GE et GF; désignons cette tangente par T, on aura

$$a:b::\text{T}:\text{GI}.$$

624. Lorsque les cordes parallèles II′, BB′ se terminent chacune aux deux branches de l'hyperbole, leur diamètre conjugué XOY ne rencontre pas la courbe, et il n'y a plus de segmens, et le calcul donne alors

$$\text{NI}^2:\text{BK}^2::\text{ON}^2+b^2:\text{OK}^2+b^2.$$

625. La forme de cet ouvrage ne nous permet pas de nous étendre davantage sur les autres propriétés des lignes du second degré; elles appartiennent aux traités spéciaux sur cette matière; ce que nous avons dit suffit pour la plupart des applications, et pour faire connaître la nature de ces lignes.

Calcul appliqué aux projections cylindriques droites ou orthogonales.

626. Si nous représentons par

L la longueur d'une droite;

L′ la longueur de la projection de cette droite sur un plan;

(L, L′) angle de L et de L′; on aura évidemment $\text{L}'=\text{L}\cos.(\text{L},\text{L}')$;

si la droite est parallèle aux plans, on aura $\cos.(\text{L},\text{L}')=1$, et $\text{L}=\text{L}'$.

627. Soit ABC un triangle dont le côté AB est parallèle au plan de projection, et A′B′C′ la projection de ce triangle; de C et C′, abaissons des perpendiculaires CD, C′D′ sur AB et A′B′; C′D′ sera la projection de CD.

Faisons $AB = c,$

$AC = b,$

$BC = a,$

$A'B' = c' = c,$

$A'C' = b',$

$B'C' = a';$

angle dièdre ABC avec $A'B'C' = \alpha,$

$CD = h,$

$C'D' = h',$

aire $ABC = S,$

aire $A'B'C' = S';$

on aura $h' = h \cos. \alpha,$

$S = \frac{1}{2} hc,$

$S' = \frac{1}{2} h'c',$

$$\frac{S'}{S} = \frac{h'}{h} = \cos. \alpha.$$

et $S' = S \cos. \alpha.$

628. Menons par AB un plan parallèle à celui de projection, et projetons ABC en ABC″ sur ce second plan ; soit AC″B un angle droit, les quatre points A, B, C, C″ sont les sommets d'une pyramide triangulaire tri-rectangle en C″,

soit $S'' = \text{aire face } CC''B = \frac{1}{2} CC'' \times C''B,$

$S''' = \text{aire face } CC''A = \frac{1}{2} CC'' \times C''A,$

$S' = \frac{1}{2} . AB . C''D = \text{aire } ABC'',$

$S = \frac{1}{2} AB . CD.$

$$S''^2 + S'''^2 = \frac{1}{4} CC''^2 (C''A^2 + C''B^2) = \\ = \frac{1}{4} CC''^2 (AB^2),$$

$$S'^2 + S''^2 + S'''^2 = \frac{1}{4} AB^2 (CC''^2 + C''D^2) = \\ = \frac{1}{4} . AB^2 . CD^2 = S^2.$$

Appelons la face S la face *hypothénuse*, on aura cette proposition analogue au théorème de Pythagore.

Dans toute pyramide triangulaire tri-rectangle, le carré de la face hypothénuse est égal à la somme des carrés des trois faces latérales.

629. Soient toujours dans la même supposition $\alpha =$ angle dièdre. ABC, ABC″,

$\beta =$ AC″C,

$\gamma =$ BC″C;

on aura

$$S' = S \cos. \alpha,$$

$$S'' = S \cos. \beta,$$

$$S''' = S \cos. \gamma;$$

d'où $S'^2 + S''^2 + S'''^2 = S^2 (\cos.^2 \alpha + \cos.^2 \beta + + \cos.^2 \gamma) = S^2,$

et $$\cos.^2 \alpha + \cos.^2 \beta + \cos.^2 \gamma = 1.$$

La somme des carrés des cosinus des angles que fait un plan avec trois plans rectangulaires est toujours égale à l'unité.

630. Si du sommet C″ on abaisse une perpendiculaire C″P sur la face hypothénuse CAB, les angles de C″P avec C″C, C″A, C″B sont respectivement égaux à α, β, γ : donc la somme des carrés des cosinus des angles que fait une droite avec trois droites rectangulaires est égale à l'unité.

631. Menons du sommet C″ une seconde droite C″Q, faisant avec les droites C″C, C″A, C‴B, les angles α', β', γ', on aura

$$\cos.' C''P, C''Q = \cos. \alpha \cos. \alpha' + \cos. \beta \cos. \beta' + \cos. \gamma \cos. \gamma'.$$

632. Soit un triangle ABC, dont le plan fait, avec celui de projection, un angle quelconque α, et n'ayant aucun de ses côtés parallèle à ce plan; par A, menons un plan parallèle à celui de projection, et soit D le point

d'intersection de ce plan avec la droite BC; AD sera parallèle au plan de projection; désignons par A', B', C', D', les projections respectives de A, B, C, D, on aura

$$\text{aire } A'B'D' = \text{aire } ABD. \cos. \alpha;$$
$$\text{aire } A'D'C' = \text{aire } ADC. \cos. \alpha;$$

or $$A'B'C' = A'B'D' + A'D'C'$$
$$ABC = ABD + ADC;$$

donc $$A'B'C' = ABC. \cos. \alpha.$$

La conclusion reste la même lorsque la ligne AD tombe hors du triangle ABC : donc l'aire de la projection d'un triangle est égale à l'aire du triangle multipliée par les cosinus de l'angle dièdre que forme le plan du triangle avec celui de projection.

633. On peut partager un polygone en triangles; de là on conclut que l'aire de la projection d'un polygone est égale à l'aire du polygone, multipliée par le cosinus de l'inclinaison de son plan sur celui de projection.

634. En considérant une figure courbe plane comme un polygone composé d'une infinité de petits côtés, on conclut que l'aire de la projection d'une figure plane quelconque est égale à l'aire de cette figure multipliée par le cosinus de l'angle d'inclinaison.

635. Soit S l'aire d'une figure plane; S', S'', S''', les aires des projections de ces figures sur trois plans rectangulaires; α, β, γ, les angles que forment le plan de la figure S avec les plans de projection, on aura

$$S' = S \cos. \alpha$$
$$S'' = S \cos. \beta$$
$$S''' = \cos. \gamma;$$

d'où $S'^2+S''^2+S'''^2=S^2(\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma)=S.^2$.

Donc le carré de l'aire d'une figure plane est égal à la somme des carrés des aires des trois projections de la figure sur trois plans rectangulaires (628).

Projection sur une droite.

636. Si d'un point donné A on mène un plan perpendiculaire à une droite fixe X, le point de rencontre A′ est la *projection* du point A sur la droite X.

Soient A′ et B′ les projections de deux points A et B sur la droite X; toutes les droites comprises entre les plans projetans auront pour projection la longueur A′B′; menez par le point A′ une parallèle à AB; la partie interceptée entre les deux plans projetans est évidemment égale à AB, nommant α l'angle de AB avec A′B′ on aura l'équation $A'B'=AB\cos.\alpha$.

Ainsi la projection d'une droite sur une autre, est égale à la droite projetée, multipliée par le cosinus de l'angle de deux droites. De là on tire des conséquences analogues à celles qu'on a énoncées ci-dessus pour les surfaces. La plus importante est celle-ci : la projection du côté d'un polygone sur une droite est égale à la somme des projections des côtés restans sur la même droite; il n'est pas nécessaire que les côtés soient dans le même plan et selon la situation respective des côtés, il y en a dont la projection doit être prise *soustractivement*.

Cette propriété, écrite algébriquement donne l'équation fondamentale de la polygo-

nométrie et fournit les formules pour la transformation des coordonnées, qui n'est qu'un cas particulier de tétragonométrie plane et de hexagonométrie sphérique. (Note 29.)

Aire de l'ellipse.

637. Soit O le centre d'un cercle; par le diamètre AOB menons un plan faisant un angle dièdre α avec celui du cercle; projetons le cercle sur ce plan; la projection est une ellipse qui aura AB pour grand axe, et AB cos. α pour petit axe; or l'aire de l'ellipse est égale à celle du cercle ou à $\pi \frac{AB^2}{4}$ multiplié par cos. α (634), égale à $\pi \frac{AB^2}{4}. \cos. \alpha = \pi. \frac{1}{2} AB . \frac{1}{2} AB \cos. \alpha$. Ainsi l'on trouve l'aire d'une ellipse en multipliant le produit de ses demi-axes par le rapport de la circonférence au diamètre.

On peut aussi trouver l'expression de cette aire de cette manière :

Sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre, décrivons une circonférence en coupant les deux courbes par une suite de plans perpendiculaires au grand axe, les longueurs des sections correspondantes sont toujours dans le même rapport du grand axe au petit axe; donc les aires comprises entre les mêmes plans sont dans le même rapport (proposit. 3 de la page 271).

Ainsi $\frac{1}{2} a$ désignant le grand axe et $\frac{1}{2} b$ le $\frac{1}{2}$

petit axe : on aura pour aire du cercle πa^2 et pour celle de l'ellipse $\pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi\, ab$.

Il est facile maintenant de déterminer l'aire d'un segment et d'un secteur elliptiques.

638. Deux diamètres perpendiculaires dans le cercle se projettent suivant deux diamètres conjugués dans l'ellipse ; en joignant les extrémités de ces derniers diamètres par des cordes, on aura un parallélogramme inscrit dans l'ellipse, et il est la projection du carré inscrit dans le cercle ; or l'aire de ce carré est invariable; donc aussi l'aire du parallélogramme inscrit dans l'ellipse est de grandeur invariable.

On démontre de la même manière que la somme des carrés des deux diamètres conjugués dans l'ellipse est une quantité constante. Des propriétés analogues ont lieu dans l'hyperbole; la différence des carrés des quantités a et b ou $a^2 - b^2$ est constante, et l'aire du parallélogramme construit sur les diamètres conjugués a et b est également constante.

Aire de la parabole.

639. Soient A et V deux points pris sur une parabole; VT un diamètre prolongé rencontrant en T la tangente AT. Il s'agit de trouver l'aire du triangle mixtiligne AVT ; concevons une pyramide ayant son sommet en A ; pour arête AT et pour base l'aire du parallélogramme compris sous AT et TV ; coupant la pyramide et le triangle mixtiligne par une suite de plans parallèles, l'aire de la section pyramidale est à la longueur de la section dans le triangle, tou-

jours dans le même rapport de l'aire de la base à l'arête AT(620); donc d'après la proposition troisième de la page 271, le volume de la pyramide est à l'aire du triangle dans le même rapport; et l'on en conclut facilement que l'aire mixtiligne est égale au volume de la pyramide divisée par sa hauteur, c'est-à-dire au tiers de sa base; ainsi le triangle mixtiligne a pour aire le tiers du parallélogramme formé sous AT et TV; comme on connaît l'aire du triangle rectiligne ATV, on aura ainsi l'aire du segment parabolique, compris entre l'arc AV et la corde AV.

Surfaces du second degré.

640. (*Fig.* 135.) On a donné le nom de *surfaces du second degré* à celles qui ne peuvent être rencontrées par une droite en plus de deux points.

Nous allons donner une idée de ces surfaces.

Ellipsoïde.

641. ABA'B' est une ellipse; AA', BB', en sont les axes rectangulaires, et O le centre: au point O est élevée une perpendiculaire sur le plan de l'ellipse; sur cette perpendiculaire on prend, à partir de O, en dessus et en dessous du plan, deux longueurs OD, OD', égales chacune à BD. Par AA' et DD', pris pour axes, on fait passer une ellipse dont le plan est évidemment perpendiculaire à celui de l'ellipse AB, A'B'. On voit la moitié de la seconde ellipse transporté en ADA', où elle est représentée en rabattement.

Par les axes BOB', DOD', faisons passer une

troisième ellipse : on en voit la moitié rabattue en A'DB'; menons maintenant une suite de plans parallèles au plan BDB'D'; ils coupent l'ellipse ABA'B' suivant les cordes MM', N'N', etc., et l'ellipse ADA'D' suivant les cordes, passant par I, I', I'', etc., parallèlement à DOD', et égales respectivement à 2 fois *mm'*, 2*nn'*, 2*pp'*, etc.; construisant successivement toutes les ellipses, ayant leur centre en I, I', I'', etc., et pour axe MM', 2*mm'*; NN', 2*nn'*; PP', 2*pp'*; la réunion de toutes ces ellipses forme une surface nommée *ellipsoïde*.

Les droites AOA', BOB', DOD' sont les *axes principaux*, et O le centre de l'ellipsoïde; connaissant les axes principaux d'un ellipsoïde, on peut donc construire la surface. Les trois plans qui passent par les axes, pris deux à deux, sont les *plans principaux*.

642. Tout plan K parallèle au plan ABA'B' coupe la surface suivant une ellipse. En effet, soit *i''*, *u*, *v*, *v'*, *u'*, la projection de cette courbe sur le plan ABA'B'; les droites parallèles *vv'*, *uu'*, sont cordes dans les ellipses NN', MM'; de plus, l'axe *i''*, O, I'', est dans le plan de l'ellipse ADA'; alors, à l'aide de la propriété des segmens, on démontre facilement que $vv'^2 : uu'^2 :: I'I'' \times I'i'' :: II'' \times Ii''$; donc la courbe est une ellipse.

643. Ainsi, dans tout ellipsoïde, un plan mené perpendiculairement à un axe principal coupe la surface suivant une ellipse; de là on conclut facilement, en s'appuyant sur la proposition des segmens :

1° Toute section faite dans l'ellipsoïde par un plan, est une ellipse.

2°. Toutes les sections parallèles ont les

centres distribués sur une même droite, passant par le centre de la surface ; cette droite est un diamètre de la surface, et la section centrale est dit *un plan conjugué à ce diamètre.*

Tout plan passant par un diamètre donné coupe la surface suivant une ellipse, et le plan conjugué au diamètre suivant une droite ; il y a deux positions où cette droite est conjuguée au diamètre donné dans la section elliptique. Ainsi, à chaque diamètre correspondent deux *diamètres conjugués*, et les trois plans qui passent par ces diamètres, pris deux à deux, sont des *plans conjugués*. Ces plans ne sont à angles droits que lorsque les diamètres sont des axes principaux. On démontre que le volume du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués est constant, et que la somme des carrés de ces diamètres est aussi constante.

3°. A mesure que les sections parallèles s'éloignent du centre, les axes de l'ellipse diminuent ; et à la fin l'ellipse se réduit à un point, et alors le plan est tangent à l'ellipsoïde.

4°. Par un point pris sur l'ellipsoïde, faisant deux sections qui donnent deux ellipses, le plan qui renferme les deux tangentes menées à ces deux ellipses par le point, est tangent à la surface ; ce plan est unique.

5°. Si, par un point, on mène tant de sécantes qu'on voudra, les points qui divisent ces sécantes harmoniquement sont situés dans un même plan, qui est le plan polaire du point (409) ; les milieux des cordes parallèles sont situés sur un même plan passant par le centre.

6° Tout cône qui rencontre un ellipsoïde suivant une ellipse, le coupera en sortant aussi

suivant une ellipse ; les deux ellipses et le plan polaire correspondant au sommet du cône se rencontrent suivant la même droite.

7° Un cône étant tangent à un ellipsoïde, la courbe de contact est une ellipse ; elle est l'intersection de la surface par le plan polaire du sommet du cône.

8°. Toutes les sections parallèles ont leurs centres situés sur un même diamètre, et sont semblables.

9° Toute section perpendiculaire à un plan principal, a son centre et un axe principal situé dans ce plan.

10° Soit OB le $\frac{1}{2}$ axe moyen entre les trois axes principaux ; on mène dans le plan ADA'D' deux droites OR, OR' égales chacune à OB ; les sections passant par OR, OB, et par OR', OB', sont donc des cercles ; donc, par un point quelconque sur l'ellipsoïde, menant des plans parallèles à ces sections, on obtiendra deux sections qui sont aussi des cercles (8°) ; ainsi par chaque point de l'ellipsoïde passent deux cercles situés sur la surface.

On conclut du numéro 6°. comme on a fait pour la sphère (586), si on coupe la surface de l'ellipsoïde par un plan parallèle à un plan tangent ; prenant le point de contact pour sommet, une ellipse quelconque tracée sur la surface se projette coniquement sur la section parallèle au plan tangent, suivant une ellipse semblable à celle de la section. Ces projections sont dites *stéréométriques*, en terme de géodosie. On en fait usage dans la construction des cartes géographiques.

Ellipsoïde de révolution.

644. (*Fig.* 135.) Si l'ellipse ABA'B' est un cercle, toutes les sections passant par l'axe D'D deviennent des ellipses égales; l'ellipsoïde est alors dit de révolution, parce qu'il est engendré par la révolution de la demi-ellipse ADA', tournant autour de l'axe DOD'. Si DOD' est le grand axe, l'ellipsoïde est dit allongé; s'il est le petit axe, l'ellipsoïde est aplati; telle est à peu près la surface du globe terrestre.

Hyperboloïde à une nappe.

645. (*Fig.* 136.) Dans la surface précédente, toutes les sections parallèles à DBD' sont des ellipses semblables, partagées chacune par le plan ADA'D', en deux demi-ellipses égales; supposons que chacune de ces $\frac{1}{2}$ ellipses fasse un demi-tour jusqu'à ce qu'elle tourne sa convexité au plan ADA'D', et qu'ensuite chaque $\frac{1}{2}$ ellipse soit remplacée par une branche d'hyperbole ayant mêmes axes; toutes ces hyperboles sont semblables, et forment une surface nommée *hyperboloïde à une nappe*.

646. Les hyperboles M, N, P se rétrécissent lorsqu'elles s'approchent du point A'; à ce point, les hyperboles se réduisent à deux droites A'X, A'Y; il en est de même au point A; menant par l'axe DOD' un plan quelconque, il est évident que la section sera une hyperbole; tous les plans parallèles donneront aussi des hyperboles qui se rétrécissent à mesure que la section s'éloigne du centre; lors-

qu'elle sera tangente à l'ellipse AA', l'hyperbole se réduit à deux droites, et le plan est tangent

647. On démontre en général que le plan tangent en un point quelconque de l'hyperboloïde, a deux droites en commun avec cette surface; l'intersection de ces droites est le point de contact; par conséquent, on peut tracer sur l'hyperboloïde à une nappe une infinité de droites qui divisent sa surface en un réseau de quadrilatères rectilignes, mais n'ayant pas les quatre côtés dans un même plan; or, une droite qui est assujettie à se mouvoir sur trois autres droites non situées dans un même plan, engendre un tel réseau: donc la droite mobile décrit alors un hyperboloïde à une nappe.

Hyperboloïde de révolution à une nappe.

648. (*Fig.* 136.) Si l'ellipse AA' devient un cercle, toutes les sections passant par l'axe DOD' deviennent égales, et l'hyperboloïde est engendré par la révolution de l'hyperbole E autour de l'axe DD'; dans ces cas, A'O mesure la plus courte distance des droites X et Y à l'axe DOD'; et dans toutes les positions du point A sur la courbe, la droite X fait évidemment le même angle avec l'axe DD'. L'hyperboloïde de révolution à une nappe est donc engendré par le mouvement d'une droite qui est assujettie à faire toujours le même angle avec une droite fixe, et à en rester éloigné d'une distance invariable; les deux droites X et Y engendrent le même hyperboloïde; lorsque cet angle est nul, l'hyperboloïde devient

un cylindre; lorsque la distance est nulle, l'hyperboloïde devient un cône.

Si on prend sur l'axe fixe de rotation deux points quelconques, M et M', sur la droite mobile deux autres points N et N' le volume du tétraèdre ayant ces quatre points pour sommet est constant, lorsque les distances MM' et NN' sont constantes.

(Voir note 32.)

649. Voici une méthode facile de construire l'hyperboloïde de révolution : découpez en carton deux cercles égaux, et divisez-les en un même nombre des parties égales, et numérotez danschacun les points de division par ordre; fixez les cercles de manière qu'ils soient parallèles et que la ligne qui joint les centres soit perpendiculaire à leurs plans; maintenant, joignez par des fils les points des deux cercles qui portent le même numéro, en haut et en bas; si la direction de ces fils est perpendiculaire aux plans des cercles, ils seront les élémens d'un cylindre; si ces directions sont inclinées, ces fils seront les élémens d'un hyperboloïde de révolution.

Hyperboloïde à deux nappes.

650. (*Fig* 135.) Si les deux ellipses ABA'B', ADA'D', sont remplacées par des hyperboles, alors, conservant le même mode de construction, l'ellipsoïde sera changé en hyperboloïde à deux nappes : les sections perpendiculaires à AA' sont des ellipses; les deux nappes sont séparées; si les hyperboles sont égales on aura un hyperboloïde de révolution à deux nappes;

elles sont engendrées par la révolution des deux branches de l'hyperbole autour de l'axe qui la coupe. Sur cette surface, on ne peut tracer aucune droite.

Paraboloïde elliptique.

651. (*Fig.* 135.) Si les ellipses ABA'B', AD A'D, sont remplacées par des paraboles, ayant pour axe AA', toutes les sections perpendiculaires à BB' sont des paraboles égales; mais les sections perpendiculaires à AA' sont des ellipse; lorsque les paraboles directrices deviennent égales, le paraboloïde est de révolution et engendré par la rotation d'une parabole autour de son axe.

On ne peut tracer aucune droite sur cette surface.

Paraboloïde hyperbolique.

652. Dans la surface précédente, toutes les sections parallèles à DBD'B' sont des ellipses semblables, partagées en deux parties égales par le plan ADA'D'. Supposons que chaque $\frac{1}{2}$ ellipse fasse un demi-tour, dans son plan, de manière à présenter sa convexité au plan AD A'D', et qu'ensuite chaque $\frac{1}{2}$ ellipse devienne une $\frac{1}{2}$ hyperbole ayant mêmes axes; la surface qu'on obtient est le paraboloïde hyperbolique, toutes les sections parallèles à DBD'B' sont des hyperboles semblables; et lorsque les plans deviennent tangens, les hyperboles se changent en deux droites; ainsi, par chaque point de cette surface passent deux droites situées sur la surface : on peut donc aussi, com-

me en 647, le diviser en un réseau composé d'une infinité de quadrilatères. Si on coupe la surface par des plans parallèles à ADA'D', on obtient des paraboles égales, mais tournées dans un sens opposé à celui qu'elles ont dans le paraboloïde elliptique; de sorte que, si on conçoit que dans celui-ci toutes les paraboles fassent dans leur plan un demi-tour, on obtient le paraboloïde hyperbolique; ou bien encore si dans l'hyperboloïde à une nappe, l'ellipse ABA'B' devient une parabole, on forme un paraboloïde hyperbolique; aussi ces deux surfaces peuvent être engendrées par le mouvement d'une droite; mais, dans l'hyperboloïde elliptique, le plan mené par le diamètre AA' et la droite AY rencontre une seconde fois sa surface, suivant une droite parallèle à AY; tandis que dans le paraboloïde hyperbolique, ce plan ne peut plus rencontrer la surface; et réciproquement aucun élément de la surface ne peut rencontrer ce plan: donc le paraboloïde elliptique est engendré par le mouvement d'une droite qui s'appuie sur deux autres, et reste constamment parallèle à un plan fixe.

653. Il existe donc cinq surfaces du second degré: 1° l'ellipsoïde; 2° l'hyperboloïde à une nappe; 3° l'hyperboloïde à deux nappes; 4° le paraboloïde elliptique; 5° le paraboloïde hyperbolique; les quatre dernières sont des modifications de la première, et toutes les propriétés énoncées (643) convenablement modifiées, appartiennent à toutes les surfaces du second degré; les trois premières surfaces ont un centre, les deux autres en sont privées. Le paraboloïde hyperbolique est le seul sur lequel

on ne puisse tracer ni ellipse, ni cercle. On distingue encore comme cas particuliers : 1° le cône du second degré; il est engendré par le mouvement d'une droite qui s'appuie constamment sur une section conique et passe toujours par le même point; or, par chaque point du cône, passent deux cercles; et on peut prendre un quelconque de ces cercles pour base : donc, tout cône du second degré est un cône oblique ou droit à base circulaire.

On donne, d'après M. Hachette, le nom général de *surfaces réglées* à toutes celles qui sont engendrées par des droites, parce qu'on peut appliquer contre elles *une règle* qui les touche suivant toute sa longueur. Dans toute surface réglée le plan tangent a une droite en commun avec la surface; si pour tous les points situés sur cette droite le plan tangent reste le même, alors il touche la surface tout le long de la droite, et la surface est *développable*; mais si le plan tangent change de position avec le point de contact, alors la surface n'est pas développable, et porte le nom de *surface gauche*, terme emprunté de la coupe des pierres, où un quadrilatère est dit gauche quand les côtés ne sont pas dans un même plan.

Les cylindres, les cônes, etc., sont des surfaces réglées dévcloppables; les hyperboloïdes elliptiques et paraboliques sont des surfaces réglées gauches (Voyez le *Traité des Surfaces réglées* que vient de publier M. Gascheau.)

654. Les surfaces du second degré jouissent encore d'autres propriété importantes; on les trouve dans les traités algébriques ou géométriques composés sur cette matière par MM. Biot, Leroy, Dupin, Poncelet, et dans

les annales de Mathématiques, publiées par M. Gergonne; on y voit, par les travaux de MM. Chales, Sturm, Bobilier et Gergonne, que même dans la science de l'étendue, les méthodes algébriques sont non-seulement les plus générales, les plus fécondes, mais encore l'emportent sur les considérations géométriques par la facilité et la brièveté. (Note 33.)

Volumes de l'ellipsoïde et du paraboloïde elliptique.

655. Soient 2 a, 2 b, 2 c les axes principaux d'un ellipsoïde; imaginons une sphère ayant 2 c pour diamètre; d'après le même principe (page 271) le volume de l'ellipsoïde est à celui de la sphère comme les aires des sections faites perpendiculairement à l'axe 2 c, or le volume de la sphère est égal à $\frac{4}{3}\pi c^3$ donc celui de l'ellipsoïde sera égal à

$$\tfrac{4}{3}\pi c^3 \times \pi \frac{ab}{\pi c^2} = \tfrac{4}{3}\pi abc:$$

656. Si on fait dans le paraboloïde elliptique une section perpendiculaire à l'axe principal, le volume du segment est toujours la moitié du cylindre qui aurait pour bases la section elliptique, et pour hauteur celle du segment.

En effet concevons un triangle ayant même hauteur que le segment; faisant des sections perpendiculaires à la hauteur, et appliquant le second principe (page 271) on en conclut que le volume du segment divisé par sa base est égal à l'aire du triangle divisée par sa base; donc; etc.

Sur le volume du paraboloïde hyperbolique, ou du Conoïde.

657. Soit une pyramide triangulaire CQAP, trirectangle en Q; dans le plan CQA construisons le parallélogramme CQAB, et supposons que la droite CB se meuve toujours appuyée sur les droites AB et CP, et parallèlement au plan du triangle AQP; elle engendrera une surface conoïde. Le volume du solide compris entre cette surface, les triangles AQP, CQP et le parallélogramme CQAP, est égal à l'aire du triangle CQP multipliée par la moitié de AQ. En effet, faisons dans le solide une section *cqp*, parallèle au plan CQP, on a l'angle CQP égal à l'angle *cqp*, et $cq = CQ$ comme parallèlle entre parallèle; donc CQP : *cqp* :: PQ : *pq*, ou comme AQ : A*q*. Ainsi: les aires sont proportionnelles à leurs distances à l'arête AB; concevons un triangle ayant même hauteur AQ et une base située dans le plan CQP; faisant des sections parallèles à ce plan, on pourra appliquer le deuxième principe (pag. 271) donc le volume du conoïde divisé par sa base PCQ est égal à l'axe du triangle divisé par sa base; donc, etc., le raisonnement reste le même, si l'angle solide Q, au lieu d'être tri-rectangle, est quelconque, et si l'on remplace la directrice droite CP par une ligne courbe située dans le plan CQP.

Théorie des moyennes distances.

658. On peut trouver facilement les aires et les volumes des surfaces de révolution et les

volumes de certaines surfaces cylindriques, au moyen de la théorie dite *des moyennes distances*, que nous allons succinctement exposer.

659. Soient A, B, C, trois points qui se succèdent en ligne droite, et A′, B′, C′ leurs projections orthogonales sur un plan quelconque, on aura toujours, comme il est facile de s'en convaincre,

$$BB' \times AC = AA' \times BC + CC' \times AB,$$

et $$BB' \times A'C' = AA' \times B'C' + CC' \times A'B'.$$

660. Si AB = BC, alors AC = 2AB,

et l'on a $$2BB' = AA' + CC';$$

ce qui est connu.

Si $AB = 2BC$, alors $AC = 3BC$,

et il vient $$3BB' = AA' + 2CC'.$$

Si $AB = 3BC$, alors $AC = 4BC$,

et il vient $$4BB' = AA' + 3CC'.$$

Soient cinq points A, B, C, D, E se succédant en ligne droite, et de manière que l'on ait AB = BC = CD = DE, et A′, B′, C′, D′, E′, leurs projections sur un plan, on aura

$$2CC' = BB' + DD' \text{ (659)},$$

$$2CC' = AA' + EE';$$

d'où $$4CC' = AA' + BB' + DD' + EE'.$$

660. Le point C est le point de *moyenne distance* relativement aux quatre points A,B,D,E. Soit en général une droite divisée en un nombre pair $2n$ de parties égales, on aura $2n+1$ points de division, comprises les extrémités de la droite; et le point milieu de la droite est le point de moyenne distance relativement aux $2n$ autres points; c'est-à-dire que la distance de ce point à un plan quelconque est égale à la somme des distances des autres points à ce

même plan divisé par le nombre $2n$ de ces distances. Lorsque le plan est perpendiculaire à la droite, les distances sont comptées sur la droite même, à partir du point d'intersection. Le nombre n étant quelconque, et aussi considérable qu'on veut, on a donné au point milieu d'une droite le nom de *moyenne distance de la droite*; en statique, ce même point se nomme *centre de gravité de la droite*.

661. Soient AB, CD, deux droites de longueur déterminée, situées ou non dans un même plan, I le milieu de AB, et L le milieu de CD, que l'on divise AB en $2m$ parties égales, et CD en $2n$ parties égales; et si l'on fait $\frac{AB}{m}=\frac{CD}{n}$, toutes les $2m+2n$ parties sont égales entre elles. Prenons sur la droite IL un point O tel, que l'on ait

$$IO : OL :: CD : AB :: n : m :$$

d'où l'on tire $IL : CD+AB :: IO : CD$.

Abaissant des points I, O, L des perpendiculaires II', OO', LL' sur un plan quelconque, on aura

$$OO'\times IL = II'\times OL + LL'\times IO \text{ (659)};$$

d'où $OO'\times(n+m) = m\times II' + n\times LL'$,

et $OO'\times(CD+AB) = II'\times AB + LL'\times CD$.

Or, les produits $m\times II'$, $n\times LL'$ sont respectivement égaux à la somme des distances des points de division situés sur AB et sur CD (660); le point O est donc le point de moyenne distance des $2m+2n$ points, et comme $m+n$ est un nombre entier quelconque, le point O est le point de moyenne distance des deux longueurs AB et CD.

Ainsi, pour trouver le point de moyenne

distance de deux longueurs AB, CD, on réunit par une droite les moyennes distances de ces deux longueurs, ensuite on partage cette droite en deux segmens tels que l'on ait

$$AB : CD :: LO : IO,$$

ou en segmens réciproquement proportionnels aux longueurs.

662. Etant données maintenant tant de longueurs l, l', l'', l''' qu'on voudra ; soit I le point de moyenne distance de l et l' ; joignez I au milieu de l'' ; partagez cette droite en segmens réciproquement proportionnels à $l+l'$ et l'', vous aurez un point I' ; joignez-le au milieu de l''', et partagez la droite en parties réciproquement proportionnelles à $l+l'+l''$ et l''', et ainsi de suite. Le dernier point ainsi déterminé est le point de moyenne distance des longueurs l, l', l'', etc. Et si l'on désigne par p, p', p'', p''' les moyennes distances de l, l', l'', l''', et par P la moyenne distance de toutes ces longueurs, il est facile de voir qu'on aura

$$P(l+l'+l''+l'''+\ldots. =$$
$$=pl+p'l'+p''l''+p'''l'''+\ldots.$$

Ce point est le même qu'on nomme, en statique, *le centre de gravité du système de ces droites*.

663. Si tout restant le même, une de ces droites. l, par exemple, sans changer de longueur, varie de position.

Soit I le milieu de l dans la première position, et I' son milieu dans la seconde position, de sorte que le chemin décrit par ce milieu est II'. Soit G le centre de gravité du système dans la première position, et G' dans la seconde position, GG' sera le chemin dé-

crit par le centre de gravité du système, en vertu du déplacement de l. Soit encore H le centre de gravité du système, quand on en ôte la droite l; il est évident que les points H, G, I sont sur la même droite, et désignant la somme des longueurs $l+l'+l''+\ldots$ par L, le point G divise la droite HI en parties réciproquement proportionnelles à l et à $L-l$. Mais les trois points H, G', I' sont aussi sur une droite que G' divise en parties réciproquement proportionnelles à l et $L-l$, les droites HGI, HG'I' sont donc divisées proportionnellement en G et G', il s'ensuit que GG' est parallèle à II'. et qu'on a la proportion

$$GG' : II' :: HG : HI :: l :: L \times DC \times L$$

et $$GG' \times L = II' \times l.$$

Donc le périmètre, multiplié par le chemin que fait son centre de gravité lorsqu'un côté se déplace, est égal au côté mobile l multiplié par le chemin que fait son centre de gravité; de là on conclut, 1° que si le centre de gravité I du côté mobile décrit un polygone quelconque, le centre de gravité du système décrit un polygone semblable; 2° que si le centre de gravité du côté mobile décrit une courbe quelconque, le centre de gravité du système décrit une courbe semblable; 3° que les chemins faits par ces deux centres de gravité sont en raison inverse des longueurs du côté mobile et de la somme de tous les côtés.

664. Les points A, B, C n'étant pas en ligne droite; soit I le milieu de BC, prenez sur AI une longueur IO égale au $\frac{1}{3}$ de AI; projetez les points A, B, C, I, O sur un plan quelconque en A', B', C', I', O', on aura

$$3OO' = AA' + 2.\ II' \ (660);$$

mais $2II' = BB' + CC'$:
donc $3OO' = AA' + BB' + CC'$.

Ainsi O est le point de moyenne distance relativement aux points A, B, C.

Les droites AO, BO, CO prolongées coupent en deux parties égales BC, AC, AB : on a donc un moyen facile de trouver le point O.

665. Prenons sur AB, AC deux points *b*, *c* tels que *b c* soit parallèle à BC ; la droite AO passe par le milieu de *b c* : donc elle contient le point de moyenne distance des deux droites parallèles BC, *bc*, et, en général, elle contient le point de moyenne distance du système de toutes les droites parallèles à BC, et renfermées entre AB et AC ; de même BO contient le point de moyenne distance des parallèles à AC, comprises entre BC et BA. Comme le nombre de ces parallèles est indéterminé, et qu'elles remplissent l'aire du triangle, on a donné au point O le nom de *point de moyenne distance* de l'aire du triangle ABC ; et ce point est celui qu'on nomme, en statique, *centre de gravité* de l'aire du triangle. Nous nous servirons dorénavant de cette dénomination pour abréger le discours.

666. Soient ABC, *abc*, deux triangles; M et *m*, leurs centre de gravité ; prenant sur M*m* un point O tel, que l'on ait

$$\text{aire ABC} : \text{aire } abc :: mO : MO ;$$

le point O sera le centre de gravité de la somme des deux triangles ABC et *a b c* ; et projetant M, O, *m* sur un plan quelconque, on aura

$$OO' \times Mm = MM' \times mO + mm' \times MO ;$$

d'où

$$OO' \times (ABC + abc) = MM' \times ABC + mm' \times abc ;$$

et en continuant de raisonner de la même manière pour un nombre quelconque de triangles, on parvient à cette proposition générale.

Etant donné un système de triangles, cherchant les centres de gravité de chaque triangle et celui de tout le système, la somme des aires de tous ces triangles, multipliée par la distance du centre de gravité du système à un plan quelconque, est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant l'aire de chaque triangle par la distance de son centre de gravité au même plan.

667. Si tous ces triangles sont dans un même plan, leurs aires sont entre elles comme celles de leurs projections : donc on peut dans ce cas, comme dans la proposition précédente, remplacer les aires des triangles par celles de leurs projections.

Cette conclusion ne dépend ni du nombre, ni de la grandeur, ni de la position des triangles dans le plan : elle est donc applicable aux courbes planes.

Il est facile aussi de conclure de là que la projection du centre de gravité de l'aire d'une surface plane est le centre de gravité de l'aire de la projection.

La même propriété a lieu pour les projections obliques.

APPLICATION A LA RECHERCHE DES AIRES ET DES VOLUMES.

Hélice cylindrique.

668. AB, BC, CD, DE, etc., étant un polygone ouvert, M, N, O, P, etc., les milieux

de AB, BC, CD, DE, etc.. et K le centre de gravité du système; projetant le système sur un plan quelconque, et désignant les projections par des lettres accentuées, on aura

$$KK'(AB+BC+CD+DE+\ldots)=$$
$$=AB\times MM'+BC\times NN'+CD\times OO'+\ldots$$

Si les côtés AB, BC, CD ... sont également inclinés sur le plan de projection, on a alors

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$$

donc aussi

$$KK'\times(A'B'+B'C'+C'D'+D'E'\ldots)=$$
$$=A'B'\times MM'+B'C'\times NN'+C'D'\times OO';$$

mais les produits du second membre expriment les aires des trapèzes ABA' B', BCB' C': donc l'aire de la surface prismatique ABCDE A'B'C'D'E est égale au périmètre de la projection A'B'C'D, multipliée par la distance du centre de gravité de ABCD à ce plan.

669. L'hélice décrite sur un cylindre droit peut être considérée comme un polygone d'une infinité de petits côtés également inclinés sur la base : donc l'aire du triangle mixtiligne, formé par l'arc de l'hélice, par celui de la base et par la droite, côté du cylindre, est égale à l'arc de sa base, multiplié par la distance du centre de gravité de l'hélice à cette base. Or, cette aire est aussi évidemment égale à l'arc circulaire multiplié par la moitié du côté du cylindre : donc le centre de gravité de l'hélice est à cette distance de la base, et ce centre a pour projection le centre de gravité de l'arc circulaire.

Aire des surfaces de révolution.

670. Soient AB, BC, CD, DE, etc., les côtés successifs d'un polygone plan; a, b, c, d, etc., les milieux de ces côtés; et a', b', c', d', etc., les projections de ces milieux sur un axe situé dans le plan du polygone; si le polygone tourne autour de cet axe, chaque côté décrira un cône tronqué; la somme des aires de ces cônes tronqués est égale à (610)

$$AB \times 2\pi\, aa' + BC \times 2\pi\, bb' + CD \times 2\pi\, cc' + \ldots$$

Soit O le centre de gravité du périmètre ABCD..., on aura (661)

$$OO' \times (AB + BC + CD + DE \ldots) =$$
$$= AB \,.\, aa' + BC \,.\, bb'\; CL \,.\, cc' + \ldots :$$

donc l'aire décrite est égale à

$$2\pi \,.\, OO'.\; AB + BC + CD + CE \ldots$$

Cette proposition s'énonce ainsi :

La surface décrite par un polygone plan, tournant autour d'un axe situé dans son plan, a pour aire le périmètre du polygone multiplié par la circonférence que décrit son centre de gravité.

671. Cette proposition ne dépend ni des longueurs, ni du nombre des côtés, ni de leurs inclinaisons respectives : elle a donc également lieu pour des courbes planes.

Ainsi, l'aire d'une surface annulaire, autrement dite *le tore*, décrite par une circonférence tournant autour d'un axe situé dans son plan, est égale à cette circonférence multipliée par la circonférence que décrit son centre; soit donc R, le rayon de la circonfé-

rence mobile; D, la distance de son centre à l'axe, et S, l'aire cherchée, on aura

$$S = 2\pi R . 2\pi . D = 4\pi^2 RD.$$

672. Si une demi-circonférence d'un rayon R tourne autour de son diamètre; soit d, la distance de son centre de gravité à l'axe, l'aire engendrée est égale à

$$\pi . R \times 2\pi d = \pi^2 dR;$$

mais cette aire est celle de la sphère :

donc $$2\pi^2 dR = 4\pi R^2;$$

d'où $$d = \frac{2R}{\pi}, \text{ et } \pi d = 2R.$$

Donc, si du centre on décrit une demi-circonférence ayant pour rayon la distance du centre de gravité de la demi-circonférence, elle a même longueur que le diamètre,

673. Dans la surface annulaire dont il est question au n° 670, la demi-circonférence qui tourne sa concavité à l'axe, engendre une aire égale à

$$\pi R . 2\pi \left(D + \frac{2R}{\pi}\right) = 2\pi^2 RD + 4\pi R^2;$$

et la demi-circonférence qui tourne sa convexité à l'axe, engendre une aire égale à

$$\pi R . 2\pi \left(D - \frac{2R}{\pi}\right) = 2\pi R^2 D - 4\pi R^2$$

Les deux ensemble engendrent une aire égale à $4\pi R^2 D$, comme il a été trouvé ci-dessus; ainsi, la demi-circonférence concave engendre la moitié de la surface annulaire, plus l'aire d'une sphère de même rayon, et la demi-circonférence convexe engendre la

moitié de la surface annulaire, moins la sphère de même rayon.

674. Soit un arc de cercle α de longueur l, de rayon R, tournant autour d'un axe, passant par son centre, parallèlement à sa corde, et désignons par δ la distance de son centre de gravité à l'axe ou au centre, l'aire engendrée sera égale à $2\pi\delta \,.\, l$; or, nous savons que cette aire a pour expression.

$$2\pi R \,.\, 2R \sin.\tfrac{1}{2}\alpha;$$

donc $$2\pi\delta \,.\, l = 2\pi R \,.\, 2R \,.\, \sin.\tfrac{1}{2}\alpha;$$

d'où $$\delta = \frac{2R^2 \sin.\frac{1}{2}\alpha}{l} = \frac{2R^2 \operatorname{tang}.\frac{1}{2}\alpha \cos.\frac{1}{2}\alpha}{l} = \frac{R \,.\, \text{corde}}{l};$$

or $$l < 2R \operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}\alpha;$$

donc $$\delta > R\cos.\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Ainsi, le centre de gravité d'un arc de cercle est toujours situé entre l'arc et sa corde.

Volumes des surfaces cylindriques et de révolution.

675. La solidité d'un prisme triangulaire tronqué est égale à sa base, multipliée par le tiers de la somme de ses trois hauteurs (p. 286); or, le tiers de cette somme est égal à la distance du centre de gravité de la section à la base : donc cette solidité est aussi équivalente à la base, multipliée par la distance du centre de gravité de la section à cette base.

676. Soit maintenant un prisme polygonal

tronqué, on peut le décomposer en prismes triangulaires tronqués; la solidité de chaque prisme triangulaire est égale à sa base, multipliée par la distance de cette base au centre de gravité de la section triangulaire; or, la somme de tous ces produits est égale à la base polygonale, multipliée par la distance de cette base au centre de gravité de la section polygonale : donc, la solidité d'un prisme polygonal tronqué est égale à l'aire de sa base, multipliée par la distance du centre de gravité de la section polygonale à la base. Lorsqu'on mesure les distances parallèlement aux côtés du prisme, il faut les multiplier par le sinus de l'angle d'inclinaison sur la base.

677. La solidité d'un cylindre tronqué est donc aussi égale à l'aire de sa base, multipliée par la distance du centre de gravité de la section à cette base; si la section est une ellipse, le centre de gravité est évidemment le centre de la courbe.

Evaluation des solides de révolution.

678. ABC étant un triangle rectangle en A, si ce triangle tourne autour de AC, son aire décrit le volume d'un cône droit; soit G le centre de gravité de l'aire du triangle, sa distance à l'axe AC est égale au tiers de AB. (634.)

Faisons $AB = R$,
$AC = H$,
$V =$ volume du cône,
$D =$ distance du centre de gravité du triangle à l'axe $= \frac{1}{3} R$;

on aura $V = \frac{1}{3} H . \pi R^2 = \frac{1}{2} HR . \frac{2}{3} \pi R =$
$\frac{1}{2} HR . 2 D \pi$;

donc, le volume du cône est égal à l'aire du triangle générateur, multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.

679. Soit ABDE un trapèze rectangle en A et en D; prolongeons BE jusqu'à ce qu'elle rencontre AD en C; le trapèze ABDE est la différence des deux triangles rectangles CDE, CAB; soient G, g, γ les centres de gravité du trapèze et des triangles CDE et CAB, et G', g', γ' les projections de ces points sur la droite CAD, on aura

$$\mathrm{CAB} \times \gamma\gamma' + \mathrm{ABDE} \times \mathrm{GG} = \mathrm{CDE} \times gg'.$$

Concevons maintenant que le trapèze décrive un cône tronqué, en tournant autour de AD, le volume de ce tronc est égal à la différence des volumes engendrés par les triangles CDE, CAB : donc ce volume a pour expression

$$\mathrm{CDE} \,.\, 2\pi gg' - \mathrm{CAB} \,.\, 2\pi\gamma\gamma' = \mathrm{ABDE} \,.\, 2\pi \,.\, \mathrm{GG'};$$

donc le volume du tronc de cône droit est égal à l'aire du trapèze, multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.

680. De là on conclut, en raisonnant comme ci-dessus (669), que le volume engendré par l'aire d'un polygone plan ou d'une courbe plane tournant autour d'un axe situé dans ce plan, est égal à cette aire, multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de cette aire.

Ainsi, dans la proposition (670) le volume engendré a pour valeur

$$\pi \mathrm{R}^2 \,.\, 2\pi \mathrm{D} = \pi^2 \mathrm{R}^2 \mathrm{D}.$$

681. Si le demi-cercle tourne autour de son diamètre, le volume engendré est égal à

$$\tfrac{1}{2}\pi \mathrm{R}^2 \times 2\pi d = \pi^2 \mathrm{R}^2 d;$$

d étant la distance au centre du centre de

gravité du demi-cercle ; or, le volume engendré est celui de la sphère : donc

$$\pi^2 R^2 d = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

et

$$d = \frac{4R}{3\pi}.$$

682. Dans le solide annulaire du n° 670, le $\frac{1}{2}$ cercle qui tourne sa concavité à l'axe, engendre un volume exprimé par

$$\tfrac{1}{2}\pi R^2 . 2\pi . \left(D + \frac{4R}{3\pi}\right) = \pi^2 R^2 D + \frac{4\pi R^3}{3};$$

le $\frac{1}{2}$ cercle qui tourne sa convexité, engendre le solide

$$\pi^2 R^2 D - \frac{4}{3}\pi R^3.$$

683. Si le cercle mobile n'achève pas sa révolution, et ne décrit que l'angle α, le volume engendré sera égal à

$$\frac{\alpha}{360^\circ} . 2\pi^2 . R^2 D = \frac{\alpha}{180^\circ} . \pi^2 R^2 D;$$

si, après avoir décrit α, l'axe vient à changer de distance, et que D devienne D', et si l'angle décrit est encore égal à α, le second volume sera égal à

$$\frac{\alpha}{180^\circ}\pi^2 R^2 D',$$

et la somme des deux volumes sera égale à

$$\frac{\alpha}{180^\circ}(\pi^2 R^2 D + \pi^2 R^2 D') =$$

$$= \pi R^2 . \frac{\alpha}{360^\circ} . (2\pi D + 2\pi D').$$

Le volume est donc encore égal à l'aire πR^2, multipliée par le chemin que décrit le centre de gravité ; ce chemin est formé par deux arcs de cercles tangens l'un à l'autre, et situé dans un plan auquel celui du cercle mobile est toujours perpendiculaire ; de là on peut conclure que les propositions (670) et (680), sont applicables aux surfaces engendrées par un cercle dont le centre se meut sur une ligne quelconque, et dont le plan, dans chaque position, reste constamment perpendiculaire à cette ligne ; il n'est pas même nécessaire que la figure soit un cercle. De la proposition 680, on peut conclure immédiatement que toute figure plane qui se meut de manière à rester constamment perpendiculaire à la même ligne, décrit une surface dont l'aire est égale au périmètre générateur, multiplié par le chemin que décrit son centre de gravité, et dont le volume est égal à l'aire génératrice, multipliée par le chemin que décrit le centre de gravité de cette aire ; si la figure, au lieu d'un angle droit, faisait un autre angle constant avec la ligne directrice, il faudra multiplier les chemins du centre de gravité par le sinus de cet angle.

684. Les surfaces annulaires se présentent fréquemment dans les moulures des ordres d'architecture et dans d'autres arts ; on a besoin de la proposition précédente dans le calcul des déblais et remblais.

Onglet cylindrique.

685. On nomme *onglet cylindrique* une partie d'un cylindre droit comprise entre un demi-cercle et une demi-ellipse, qui ont un

diamètre et un grand axe en commun; soient $2A$, $2B$ le grand et le petit axe d'une ellipse; si par le petit axe $2B$ on mène un plan, faisant avec celui de l'ellipse un angle α, tel que l'on ait $\cos.\alpha = \frac{A}{B}$; projetant cylindriquement l'ellipse sur ce plan, on aura un cercle de diamètre $2A$ (p. 366); le solide compris entre les deux plans et le cylindre est l'onglet; or, le centre de gravité du demi-cercle étant la projection du centre de gravité de la demi-ellipse, la distance entre les deux est donc égale à

$$\frac{4B}{3\pi} \times \text{tang.}\,\alpha = \frac{4B}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{A^2-B^2}}{B} = \frac{4}{3\pi}\sqrt{A^2-B^2};$$

donc, le volume de l'onglet est égal (676) à

$$\frac{4}{3\pi}\sqrt{A^2-B^2} \cdot \tfrac{1}{2}\pi B^2 = \tfrac{2}{3}B^2\sqrt{A^2-B^2} =$$

$$= \tfrac{2}{3}B^2\sqrt{\frac{B^2}{\cos.^2\alpha} - B^2} = \tfrac{2}{3}B^3\sqrt{\frac{1}{\cos.^2\alpha} - 1}$$

$$= \tfrac{2}{3}B^3 \text{tang.}\,\alpha = \tfrac{2}{3}B^2H,$$

où H est la hauteur de l'onglet.

Ainsi, le volume de l'onglet cylindrique est indépendant du rapport π du diamètre à la circonférence, et on peut le calculer avec exactitude, on a

$$\tfrac{2}{3}B^2H = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}BH \cdot 2B.$$

Donc aussi le volume de l'onglet est égal aux $\frac{2}{3}$ du prisme, qui aurait pour base la grande section triangulaire, et pour hauteur le diamètre du cylindre.

On peut encore arriver à ce résultat de cette manière : sur $2B$ comme diamètre, concevons

une sphère; opérant des sections perpendiculaires à ce diamètre, et appliquant le premier principe (p. 271) on en conclut : le volume de la sphère divisée par l'aire du grand cercle ou $\frac{4}{3}$ B est égale au volume de l'onglet divisée par la grande section triangulaire; donc, etc., etc.

686. Si l'onglet est compris entre deux demi-ellipses, ayant un axe 2B en commun, son volume est égal aux $\frac{2}{3}$ de la section triangulaire, multipliés par le second demi-axe A de la base; le raisonnement est le même que pour l'onglet à base circulaire.

Les voûtes dites *d'arêtes* sont composées de quatre onglets elliptiques; il est donc facile de trouver leurs volumes, ou, comme on dit, de les *cuber.*

Si le cylindre est oblique, il faut encore multiplier par le sinus de l'angle d'inclinaison du côté sur la base.

Anses de paniers; développées, développantes, centres de courbure, rayons de courbure, degrés de courbure.

687. (*Fig.* 137.) Dans le n°. 683, nous avons examiné la réunion des portions de surfaces annulaires, produites par un déplacement dans l'axe de rotation; on a un exemple simple de ce mouvement dans les courbes à plusieurs centres, désignées sous le nom d'*anses de paniers*, parce qu'elles en affectent la forme; elles proviennent en général du développement d'un polygone. Soit, pour fixer les idées, ABCD un quadrilatère plan, enveloppé d'un fil, dont les deux bouts se réu-

nissent en A; supposons qu'un bout reste fixe en se développant dans le plan de la figure, l'extrémité A du fil décrira d'abord l'arc AI dont le centre est en B, et qui a pour rayon le côté AB; lorsque le fil est arrivé en BI sur la direction du côté BC, le centre du mouvement change et vient en C; l'extrémité du fil décrit l'arc II', et le rayon CI est égal à BI+BC, ou à AB+BC; arrivé sur la direction du côté CD, il y a un nouveau déplacement dans le centre, qui se transporte en D; l'arc est décrit du rayon DI' égal à AB+BC+CD, et ainsi de suite jusqu'à l'entier développement du fil; la courbe formée par la réunion des arcs de cercles AI, II', I'I'', I''I''', est une anse de panier à quatre centres. Les courbures de ces arcs diminuent à mesure que leurs rayons augmentent; ainsi, la courbure de l'arc AI est à celle de l'arc II', comme CI est à BI, ou comme AB+BC : AB. On a donné le nom de *rayons de courbure* aux quatre longueurs AB, CI, DI', AI'', ou bien à AB, AB+BC, AB+BC+CD, AB+BC+CD+DA, parce qu'elles mesurent la courbure respective des arcs, et par cette raison, les sommets A, B, C, D portent le nom de *centres de courbure;* il est évident, 1° que chaque rayon de courbure est perpendiculaire à l'arc qu'il décrit; 2° est égal à la partie développée du polygone; 3° que chaque centre de courbure est l'intersection de deux rayons de courbure consécutifs.

688. Ces conclusions sont indépendantes du nombre des côtés du polygone, de leurs longueurs, de leurs positions respectives; elles s'appliquent donc également à une courbe plane quelconque; dans ce cas, le centre de

courbure et le rayon de courbure changent à chaque instant, et les arcs décrits par l'extrémité du fil sont infiniment petits; on nomme, par abréviation, *la développée*, la courbe qui est développée, et celle que décrit l'extrémité du fil se nomme *la développante*. Dans la *figure* 138, la développée est un cercle V, et la courbe II′I″I‴ . . . est la développante; pour la tracer, il suffit de partager la circonférence en un nombre de parties égales assez considérable, pour que chaque arc ne diffère pas sensiblement de sa corde; mener par les points de division des tangentes dans le même sens; porter à partir de ces points une longueur d'arc sur la première tangente; deux longueurs sur la deuxième, et ainsi de suite; les points I, I′ ainsi déterminés, appartiennent à la développante; tous les rayons des courbures NI, OI′, PI″, etc., sont tangens à la développée, et normales à la développante; et la courbure, à partir du point M, va en diminuant, parce que les rayons de courbure vont sans cesse en augmentant; le dernier rayon de courbure MX est égal à toute la circonférence.

689. On peut concevoir que le fil fasse plusieurs tours autour de la développée; dans ce cas, lorsqu'il sera en MX, il pourra continuer à se développer, et à commencer une autre développante qui se rattache à la première, et ainsi de suite; de sorte que la développante du cercle est une courbe tournant autour du cercle développé, et qui se prolonge à l'infini.

690. Si on prolonge les rayons de courbure NI, OI′. . . d'une longueur égale IR, I′R′, I″R″. . . , les points R, R′, R″ sont sur une courbe semblable à la développée; car, en

prenant les points très-rapprochés, on peut considérer les arcs II″, I′I″... et RR′, R′R″... comme des arcs de cercle, et respectivement semblables; au lieu de prolonger les rayons de courbure, on peut concevoir que le fil a pour longueur celle de la développée, augmentée de IR : alors la développante n'a pas de point M commun avec la développée; son extrémité décrira une développante comme celle qui commence sur la développée; et en général tous les points du fil décrivent des développantes perpendiculaires à un même système de droites.

691. Pendant que AB (*fig.* 137) décrit le secteur ABI, son centre de gravité b décrit l'arc bb', et l'on a aire ABI $=$ AB $\times$ arc bb'.

Soit G le centre de gravité du périmètre ABCD, il décrit un arc GG′ semblable à bb' (663), et l'on a $(AB+BC+CD+DA)\,GG' = AB \times$ arc bb'.

C'est-à-dire que l'aire du secteur ABI est égale au périmètre multiplié par le chemin que fait le centre de gravité. Le même raisonnement s'applique à l'aire du secteur ICI′ et à tous les secteurs, ainsi engendrés, quel que soit le nombre des côtés du polygone et leurs longueurs : donc en général l'aire renfermée entre la développée et la développante (*fig.* 138) est égale au périmètre de la développée multipliée par le chemin que décrit le centre de gravité de la développée pendant que le développement s'opère.

692. Lorsque la développée est donnée, il est facile de décrire la développante par un mouvement continu à l'aide du déroulement d'un fil; mais quand la développante est con-

nue, on ne peut trouver la développée correspondante que par des procédés qui supposent la connaissance du calcul différentiel. Si la développante est une courbe du second degré, on peut trouver le rayon de courbure et la développée par des méthodes élémentaires; mais elles sont trop longues pour être exposées ici. Voici le résultat :

Soit $2b$ le petit axe, $2a$ le grand axe d'une ellipse, R le rayon de courbure à un point M situé sur la courbe; α l'angle que forme la tangente avec un rayon vecteur qui passe par ce point; on aura $R = \frac{b^2}{a}$ cosée. $^3 \alpha$; le produit constant $\frac{b^2}{a}$ se nomme *demi-paramètre*. Dans l'hyperbole, b est l'axe qui ne rencontre pas; et dans la parabole, il faut prendre, au lieu de $\frac{b^2}{a}$, le double de la distance du foyer au sommet; aux extrémités du grand axe, l'on a $\alpha = 90°$. et coséc. $\alpha = 1$ et $R = \frac{b^2}{a}$; ainsi aux deux sommets, extrémités du grand axe, les rayons de courbure sont égaux au demi-paramètre. A partir de ces sommets, le rayon de courbure augmente, et par conséquent la courbure diminue; aux extrémités du petit axe, l'on a coséc. $\alpha = \frac{a}{b}$, et dès-lors $R = \frac{a^2}{b}$; c'est la valeur maxima de R; par conséquent la plus petite courbure est aux extrémités du petit axe; les deux courbures extrêmes sont donc entre elles comme $\frac{b^2}{a} : \frac{a^2}{b} :: b^3 : a^3 ::$ ou

comme le cube du petit axe est au cube du grand axe.

693. Tous les cercles qui passent par un point pris sur une courbe, et qui ont leurs centres sur la normale, ont évidemment même tangente que la courbe, ou, autrement, touchent la courbe en ce point. Tous ces cercles sont de courbure différente; celui d'entre eux qui a pour centre celui de courbure est le seul qui ait même courbure en ce point que la courbe donnée; ce cercle porte le nom de *cercle osculateur*. Tous les autres cercles ont des courbures plus grandes ou plus petites; par conséquent aucun d'entre eux ne peut s'insérer dans le voisinage du contact, entre le cercle osculateur et la courbe; ce genre de contact se nomme *osculation*.

Il est facile de construire les cercles osculateurs pour les courbes du second degré. En effet, soient AB, CD, deux cordes rencontrant la courbe aux points A, B, C, et D; si les deux diamètres parallèles respectivement à ces cordes sont égaux, il résulte de la propriété des segmens que les quatre points A, B, C, D sont sur une même circonférence; supposons que les points C et D se réunissent et se confondent; ou ce qui revient au même; soient BC, BA deux cordes parallèles à des diamètres égaux; la circonférence passant par les trois points A, B, C aura deux points en commun avec la courbe au point B, c'est-à-dire la tangente à la courbe en B sera aussi tangente au cercle; mais si le point C tombe aussi en B; si ayant mené par B une tangente, ensuite un diamètre parallèle, et construit son égal, on mène par B une parallèle à ce second diamètre, elle

coupera la courbe en A; le cercle qui passera par B et A, ayant même tangente que la courbe en B, touchera celle-ci en B et aura là trois points en commun avec elle; ce sera le *cercle osculateur.*

Dans la parabole, on substitue aux diamètres égaux des tangentes égales se rencontrant sur l'axe principal.

Cette construction cesse d'être applicable aux sommets, extrémités des axes principaux; là, les quatre points d'intersection se confondent en un seul. Cette considération sert à déterminer facilement, pour ces cas particuliers, la grandeur du rayon osculateur.

Plans tangens, normales; sphères osculatrices; rayons et lignes de courbure.

694. Les considérations précédentes peuvent se généraliser et s'appliquer aux surfaces; en effet, si, par le même point pris sur une surface, on mène une suite de plans coupans et une tangente à chaque section, il est évident que toutes ces lignes appartiendront au plan tangent en ce point, et par conséquent sont dans un même plan. On pourra donc toujours déterminer ce plan, au moyen de deux sections qu'on choisit de manière à présenter le plus de facilité; ainsi, dans les surfaces de révolutions, on choisit le cercle et la courbe génératrice qui passent par chaque point. Dans les surfaces engendrées par une droite, on prend cette droite pour une de ces sections, etc.

695. Si, après avoir conduit un plan coupant par un point M pris sur la surface, on

imagine une sphère ayant pour centre et pour rayon ceux de courbure de la section en ce point, cette sphère aura une tangente commune avec la surface; mais si le plan coupant est perpendiculaire au plan tangent, ou, autrement, s'il passe par la normale, la sphère aura même plan tangent que la surface : son contact sera plus intime que si le centre était hors de la normale. Si donc on mène par la normale un plan quelconque, le cercle osculateur à la section est aussi osculateur à la surface, et la sphère est osculatrice dans le sens de la section; et, généralement parlant, la surface a autant de courbures différentes qu'il y a de sections normales; mais il existe deux sections, dont l'une donne la courbure maxima, et l'autre la courbure minima.

696. Chaque section normale ayant un cercle osculateur, l'ensemble de tous ces cercles forme une surface osculatrice à la surface donnée. Cette surface osculatrice est donc formée par une infinité de cercles, ayant leur centre sur la même droite, passant par le même point, mais situés dans des plans différens. Pour un point M′ différent de M, nous aurons une autre surface osculatrice qui coupe celle de M, suivant une certaine ligne. Si les deux normales à la surface répondant à M et M′ sont dans un même plan, on pourra faire passer une même section normale par les deux points; et si ceux-ci sont infiniment rapprochés, l'intersection de deux normales donne le centre de courbure de la section; les deux surfaces osculatrices différant infiniment peu auront un cercle en commun; or on prouve par le calcul différentiel qu'il existe en

effet deux points M′ et N′, infiniment rapprochés de M, dont les normales rencontrent en deux points la normale en M. Il est possible de déterminer les positions de ces deux sections normales MM′ et MN′, qui sont toujours perpendiculaires l'une à l'autre; les surfaces osculatrices en M, M′, N′ ont pour intersections le plus petit et le plus grand des cercles osculateurs; par conséquent, les sphères qui répondent à ces cercles ont une osculation plus intime que les autres sphères d'un rayon différent; et c'est ce qui leur a fait donner spécialement le nom de *sphères osculatrices*: ainsi chaque surface a en chaque point deux rayons de courbure, dont l'un est un minimum et l'autre un maximum.

Le rayon minimum est donné par la section dans le sens de laquelle la surface a la plus grande courbure, et le rayon maximum répond à la section dans le sens de laquelle la surface a la moindre courbure.

697. Soient A, A′, A″, A‴, A⁗, etc. une suite de points infiniment rapprochés et tels que la normale en A soit rencontrée par celle en A′; que la normale en A′ soit rencontrée par celle en A″, ainsi de suite; et que chaque intersection réponde à un rayon de courbure *maximum*: tous ces points formeront une certaine ligne qui sera, généralement parlant, à double courbure. Prenons une suite de points A, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, infiniment rapprochés, tels que les normales voisines se rencontrent successivement; savoir: celle de A et *b*, celle de *b* et *c*; et supposons que les intersections répondent à des rayons minimum, on aura une seconde ligne, et les directions AA′ et A *b*

sont à angles droits. Maintenant, si de A′ on fait partir une seconde ligne A′, b′, c′, d′, e′, à rayon minimum; de même de A″, A‴, A⁗; et si on fait partir des lignes à rayons maximum de *a*, *b*, *c*, *d*, la surface sera alors divisée en compartimens quadrilatères rectangles, dont les côtés seront en général des courbes à doubles courbures, et dont les angles seront droits. Ces lignes ont été nommées *lignes de courbure de la surface*. Par chaque point, il en passe deux. Sur une surface de révolution, ces lignes sont la courbe génératrice ou méridienne et le cercle perpendiculaire à l'axe. Sur une sphère, tous les grands cercles sont des lignes de courbure. Dans les surfaces développables, le rayon maximum à chaque point est donné par la section qui donne la droite; par conséquent, ce rayon est infini; la sphère osculatrice maxima est la même que le plan tangent, et la droite de contact est une ligne de courbure; l'autre est celle qui est perpendiculaire à ces droites. Ainsi, dans les cylindres, l'*arc droit* est une ligne de courbure. Dans les surfaces coniques, c'est l'intersection de la surface avec les sphères ayant le sommet pour centre.

698. Toutes les normales à la surface répondant à la même ligne de courbure forment une surface développable. En construisant ces surfaces pour les lignes de courbure dans les deux sens, on peut donc partager le solide en plusieurs pyramides *gauches*, ayant pour base une portion de surface courbe quadrilatère et pour faces quatre surfaces développables; et c'est avec ces portions de solides, nommées *voussoirs*, qu'on construit les voûtes;

les joints sont des surfaces développables, terminées aux surfaces extérieures et intérieures desdites voûtes auxquelles elles sont perpendiculaires ; en terme d'arts, ces dernières surfaces se nomment *extrados* et *intrados*.

Des courbes à double courbure, tangentes; plan osculateur; rayons de courbure.

699. Quelle que soit la forme qu'affecte une courbe, on peut toujours la projeter ou la concevoir projetée cylindriquement sur un plan, ou, en d'autres termes, toute courbe peut être considérée comme étant tracée sur une surface cylindrique. En prenant deux plans de projection, on obtiendra deux surfaces cylindriques, qui contiendront chacun la courbe; et réciproquement; lors que ces deux surfaces seront données de forme et de position, la courbe est aussi connue, puisqu'elle n'est autre chose que leur intersection : généralement parlant, la courbe participera de la courbure des deux surfaces, et c'est ce qui a donné lieu à la dénomination de *ligne à double courbure*; toutefois en quelques cas particuliers, les deux courbures peuvent se réduire à une seule: alors les deux surfaces se coupent suivant une courbe plane. Telle est l'intersection de deux sphères. Pour se faire une idée de cette courbure en deux sens, imaginons qu'on plie un fil flexible en plusieurs parties, de manièreà former une portion de polygone plan; il sera à simple plicature; si on plie de nouveau le troisième côté de manière à le faire sortir hors du plan des deux premiers; et ensuite, si on plie le

quatrième côté de manière à ce qu'il soit hors du plan du deuxième et du troisième, et ainsi de suite, on formera un polygone à double plicature ; ou, comme on dit, un polygone gauche. Deux côtés consécutifs sont toujours dans un même plan, mais jamais trois. Si au polygone nous substituons une courbe, on formera de cette manière une courbe à double courbure.

700. Pour mener une tangente par un point pris sur cette courbe, il faut considérer que cette tangente doit se trouver à la fois dans chacun des plans tangens qu'on peut mener aux surfaces cylindriques qui contiennent la courbe; par conséquent, cette tangente est l'intersection de ces deux plans tangens.

L'ensemble des tangentes donne une surface développable.

701. Le *plan normal* est celui qui est mené par un point de la courbe perpendiculairement à la tangente. Lorsque la courbe est plane, tous les plans normaux consécutifs sont perpendiculaires au plan de la courbe, et se coupent suivant des droites parallèles, formant un cylindre droit, ayant pour base la développée de la courbe : et de même qu'on peut décrire une circonférence soit au moyen d'un centre *intérieur* situé dans son plan, soit au moyen d'un centre *extérieur*, pris sur une perpendiculaire élevée sur ce plan, on pourra aussi décrire la développante, soit par le développement de la développée plane, soit par le développement de courbes à double courbure tracées sur ce cylindre droit; et il est aisé de voir que ces courbes sont des hélices; car le fil tendu décrit une suite de petites surfaces

coniques droites, dont les sommets parcourent l'hélice développée, et dont l'angle reste constant.

702. Si la courbe est à double courbure, les plans normaux consécutifs se coupent aussi suivant des droites, dont la réunion ne forme plus une surface cylindrique, mais une surface développable. Deux tangentes consécutives sont dans un même plan (669) auquel l'intersection des deux plans normaux consécutifs est perpendiculaire; ce plan, qui renferme deux élémens contigus de la courbe, est nommé *plan osculateur;* il est rencontré par l'intersection perpendiculaire; et le point de rencontre est le centre *intérieur* de courbure, et sa distance au point de la courbe est le plus petit des rayons de courbure. Le centre *intérieur* de courbure est donc le point de rencontre des deux plans normaux consécutifs, avec plan osculateur; l'intersection de trois plans consécutifs donne un point qui est le centre de la sphère qui passe par quatre points consécutifs de la courbe; ce point est le *centre de courbure;* sa distance au point correspondant de la courbe est le *rayon de courbure absolu*, l'ensemble de ces centres de courbure forme une *arrête de rebroussement* sur la surface développable, que produit l'intersection des plans normaux; et la réunion de tous les rayons de courbure minimunes forme une surface non développable.

PREMIER APPENDICE.

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA GÉOMÉTRIE DU COMPAS.

1° Des surfaces sans épaisseur, des lignes sans largeur, des points sans étendue, sont des conceptions que la science spéculative est autorisée à admettre dans ses théories et à employer comme des moyens de solution ; mais en réalité, dès qu'il faut des instrumens pour exécuter les préceptes de la science, ces suppositions ne sont plus admissibles : ainsi le crayon le plus finement taillé est encore terminé par une petite surface ; la ligne qu'il trace n'est pas entièrement privée de largeur ni d'épaisseur; le tranchant de la règle, quelque affilée qu'elle soit, a encore une étendue superficielle ; sa rectitude n'est pas exempte d'inflexion, et la droite qu'on décrit sur le papier est un solide imperceptiblement ondulé et même à double courbe ; car la feuille de papier n'est pas mathématiquement plane. Quand on veut avoir égard à l'exactitude pratique, il faut donc choisir des procédés qui exigent le moins d'opérations, et les instrumens les moins inexacts et en plus petit nombre possible. Les géomètres se sont aussi appliqués de tout temps à résoudre tous les problèmes à l'aide de la règle et du compas seulement ; depuis on a cherché à ne se servir que de la règle, et cette partie

de la science porte le nom de *géométrie de la règle*; nous en avons donné plusieurs exemples dans ce Manuel; nous nous proposons de donner ici les principes généraux de la géométrie du compas, tout autre instrument, même la règle, étant exclu : d'après cela, il est presque superflu d'avertir qu'il n'est permis de tracer d'autres lignes que la circonférence; les longueurs des droites sont données par les points qui les terminent. Nous allons résoudre quelques problèmes élémentaires, et nous engageons à chercher des solutions plus simples; car ici nous nous attachons à faire voir la possibilité, et non à l'élégance des solutions.

2° Etant donnés trois côtés d'un triangle, on peut en construire les trois sommets; par conséquent, étant donné un côté, on peut construire le triangle équilatéral.

3° Etant donnée la longueur AB, trouver une longueur double?

Sur AB construisez le triangle équilatéral ABC; sur BC le triangle équilatéral BCD; sur BD le triangle équilatéral BDE; les trois points A, B, E sont en ligne droite, et AE = 2AB.

4° On peut donc trouver une longueur triple, quadruple; et, en général, étant donnée la longueur a, on peut trouver na, n étant un nombre entier.

5° Etant donnés l'hypothénuse a et le côté b d'un triangle rectangle, construire le triangle?

Soit $AB = b$, et $AE = a$, $a > b$.

Doublez AB, et soit $ABD = 2AB$.

Construisez le triangle isocèle ADE, ayant pour base AD et pour côtés égaux AE, DE; le triangle ABE sera le triangle rectangle demandé, et l'on aura

$$BE^2 = \sqrt{AE^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

6° Construire $\sqrt{a^2 - 2b^2}$?

Faites $a^2 - b^2 = a'^2$ (5°);

on aura $\sqrt{a^2 - 2b^2} = \sqrt{a'^2 - b^2}$.

On peut donc construire en général

$$\sqrt{a^2 - mb^2};$$

m étant un nombre entier.

7° Construire $\sqrt{mb^2}$; m étant un nombre entier et b une longueur donnée?

Solution. Faites $a^2 - mb^2 = a'^2$ (6°); a étant une longueur arbitraire; on aura

$$\sqrt{a^2 - a'^2} = \sqrt{mb^2} = b\sqrt{m}.$$

Fesant $m = 2$, on aura $\sqrt{2b^2}$ égal au côté du carré inscrit dans la circonférence qui a b pour rayon; donc, on peut partager une circonférence en quatre parties égales.

8° Construire $\sqrt{a^2 + b^2}$, a et b étant des longueurs données?

Solution. Faites $2a^2 = a'^2$ (7°),
$a^2 - b^2 = b'^2$ (5°),

on aura $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a'^2 - b'^2}$ (5°).

9° On peut donc construire $\sqrt{ma^2 \pm nb^2}$; m et n étant des nombres entiers, et a et b des longueurs quelconques; et aussi élever à l'extrémité d'une droite une perpendiculaire d'une longueur donnée.

10° Etant donnée une circonférence; son centre O; un point A hors de la circonférence, chercher les points I et I′, où la sécante OA rencontre la circonférence.

Elevez en O une perpendiculaire OM égale

au rayon (9°) ; M sera sur la circonférence ; de ce point, comme centre avec un rayon égal à $\sqrt{2\,OM^2}$, (6°) décrivez une circonférence ; elle coupera la circonférence donnée aux points cherchés I et I'.

11° Construire $a+b$ et $a-b$; a et b sont des longueurs données?

D'un point O comme centre, décrivez une circonférence d'un rayon égal à b, qu'on suppose être la plus petite longueur ; prenez un point A, éloigné de O de la distance a; cherchez les intersections I et I' de la sécante AO avec la circonférence (10°) ; alors

$$AI = a - b; \text{ et } AI' = a + b.$$

On peut donc construire $ma \pm nb$; m et n étant des nombres entiers quelconques.

12° Trouver le point milieu I d'un arc MN dont O est le centre?

Solution. Sur MN construisez un triangle isocèle quelconque AMN ; cherchez l'intersection de AO avec la circonférence (10°) ; ce sera le point milieu I cherché.

On peut donc partager un arc en 4, 8, 16, et en général en un nombre $2n$ de parties égales.

13° Étant données deux longueurs AB et CD, telles que CD = 2 AB, trouver sur CD le point milieu I?

Solution. Construisez sur AB le triangle isocèle ABE, ou AE = BE = CD ; du point A comme centre, et du rayon AB, décrivez une circonférence ; cherchez son point d'intersection avec AE ; ce sera le milieu I de AE construisant sur CD un triangle égal à BEI, on aura le milieu de CD.

14° Trouver le point milieu I d'une distance AB?

Solution. Construisez le triangle isocèle ABE, où AE = BE = 2 AB ; cherchez les milieux I, I' de AE, et de BE (13°); construisez sur II', le triangle II'O égal et symétrique à II'E; le point O est le milieu de AB.

On peut donc diviser une distance en 2, 4, 8, 16 parties égales.

15° D'un point donné C, abaisser une perpendiculaire sur la distance AB? construisez le point symétrique C'; le point milieu de CC' est le pied de la perpendiculaire cherchée.

16° Un point étant situé hors de la circonférence, on peut déterminer les points où sa polaire coupe la circonférence.

17° Etant donnés deux points A, I, trouver les points d'intersection de la droite AI avec la circonférence dont le centre est O?

Solution. Soient M et N les deux points cherchés; sur AI abaissez la perpendiculaire OP (15°); la corde MN sera divisée en deux parties égales en P; et on a $PM = \sqrt{OM^2 - OP^2}$: on connaît donc PM; et par conséquent aussi $AP - PM = AM$, et $AP + PM = AN$, ainsi, du point A comme centre, et d'un rayon AM décrivant une circonférence, elle coupera la circonférence donnée au point M, on aura de même le point N.

18° Etant données les droites AB, CD, EF, trouver une quatrième proportionnelle.

Solution. Construisez une droite MIN égale à CD+EF (11°) de sorte que MI = CD
IN = EF
par les points M et N faites passer une circon-

férence; du point I comme centre avec un rayon égal à AB on décrit un cercle coupant le premier en un point K; cherchant le point K′ ou la droite KI rencontre le premier cercle (17°) la droite IK′ est la quatrième proportionnelle cherchée.

Il est facile de trouver ce qu'il faut faire pour rendre toujours la construction possible.

19° Etant donnés les quatre sommets HM, N, M′, N′ d'un trapèze rectangle en N et N′; trouver le point O de rencontre des côtés non parallèles?

Solution. On a la proportion :

$$MN - M'N' : NN' :: M'N' : NO$$

on pourra donc construire NO (18°) et par conséquent le point O (11°).

20° Etant donnés les quatre sommets A, B, C, D d'un quadrilatère, trouver l'intersection O des deux côtés AB, CD?

Solution. De A et B abaissez les perpendiculaires AP, BQ sur CD, et le problème est ramené au précédent.

On trouve cette matière traitée avec toute l'étendue et la simplicité désirables dans l'ouvrage de Mascheroni; une nouvelle édition de la traduction française a été publiée en 1828.

DEUXIÈME APPENDICE.

FORMULES PRINCIPALES RELATIVES AUX LIGNES DU SECOND DEGRÉ ET PROPRIÉTÉS DES COURBES PLANES, EN GÉNÉRAL.

1° *Formules pour les changemens des coordonnées.*

$(y-s)\sin.XY = x'\sin.XX' + y'\sin.XY'$,
$(x-r)\sin.XY = x'\sin YX' + y'\sin.YY'$
XY = angle de l'axe des x avec celui de y ; et ainsi des autres
r, s coordonnées de la nouvelle origine relativement à l'origine.

2° *Equation générale des lignes du second degré.*

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

3°. *Notation.*

γ = angle des axes.
$B^2 - 4AC = m$ = quantité variant avec les directions des axes et non avec l'origine.
$DE - 2BF = n$
$2AE - BD = k$
$2CD - BE = k'$
$D^2 - 4AF = l$
$E^2 - 4CF = l'$
$AE^2 + CD^2 - BDE + F(B^2 - 4AC) = L$ = quantité variant avec les directions des axes et non avec l'origine.

4° *Identités.*

$k^2 - lm = 4AL$

$k'^2 - l'm = 4CL$

$n^2 - ll' = 4FL$

$k'l + kn = 2DL$

$kl' + k'n = 2EL$

$Cl - Al' + Ek + mF = L$

$Al' - CL + Dk' + mF = L$

$2Ck + Bk' + Em = o$

$2Ak + Bk + Dm = o$

$Ak'^2 + Bkk' + Ck^2 + mDk' + mEk + m^2F = mL$

$$(A-C)^2 + [B - 2A\cos.\gamma][B - 2C\cos.\gamma] = [A+C - B\cos.\gamma]^2 + m\sin.^2\gamma = (A-C)^2\sin.^2\gamma + [B - \cos.\gamma(A+C)]^2$$

$$(2Ay+Bx+D)^2 - (mx^2 - 2kx + l) = (2Cx+By+E)^2 - [my^2 - 2k'y + l'^2] =$$

$$(2Ay+Bx+D)^2 - m\left[\left(x - \frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4AL}{m^2}\right] =$$

$$(2Cx+By+E)^2 - m\left[\left(y - \frac{k'}{m}\right)^2 - \frac{4CL}{m^2}\right] = 0.$$

5° *Définitions.*

Centre = point tel qu'en le prenant pour origine les termes linéaires en x et y disparaissent de l'équation générale.

Diamètre = droite passant par le centre.

Axes conjugués = deux droites telles qu'en les prenant pour axes, le rectangle xy disparaît de l'équation.

Axes principaux = diamètres conjugués rectangulaires.

Sommets principaux ou sommets = points d'intersection de la courbe avec les axes principaux.

Foyer = point tel qu'en y fixant l'origine des coordonnées, la distance d'un point quelconque de la courbe à l'origine est une fonction rationnelle linéaire des coordonnées de ce point de la courbe.

Tangente = droite qui ne peut avoir qu'un point de commun avec la courbe.

Asymptote = tangente dont le point de contact est situé à l'infini.

Cercle osculateur = circonférence qui ne peut avoir que deux points de commun avec la courbe et à l'un de ces points elle a même tangente que la courbe.

Rayon de courbure = rayon du cercle osculateur.

Normale = une perpendiculaire à la tangente et passant par le point de contact.

Pôle = point par lequel passent toutes les cordes qui joignent deux points de contact, dont les deux tangentes correspondantes ont leur intersection située sur une droite donnée de position.

Polaire = droite donnée de position relativement au pôle.

Directrice = polaire du foyer.

6°. *Centre; sa position; et diamètres parallèles aux axes, parties d'axes interceptées; équation de la courbe rapportée au centre.*

$$x=\frac{k}{m}$$

$$y=\frac{k'}{m},$$

$Ay^2+Bxy+Cx^2+\frac{L}{m}=o$; origine au centre

Carré du $\frac{1}{2}$ diamètre parallèle à l'axe des

$$x=-\frac{L}{Cm}$$

Id. $$y=-\frac{L}{Am}$$

Rapport des deux carrés $=\frac{C}{A}$

Carré de la partie de l'axe des x, interceptée dans la courbe $=\frac{l'}{4C^2}$.

Carré de la partie de l'axe des y, interceptée dans la courbe $=\frac{l}{4A^2}$.

7° *Axes conjugués ; relation.*

$\left.\begin{array}{l} y=px \\ y=qx \end{array}\right\}$ axes conjugués passant par l'origine ;

tang. $I=\frac{(p-q)\sin.\gamma}{1+pq+(p+q)\cos.\gamma}$; $I=$ angle des axes conjugués.

$2Apq+B(p+q)+2C=o$; relation entre p et q ;

$y^2(2Ap+B)+2xy(C-Ap^2)-px^2(2C+Bp)=o$

Système d'axes conjugués passant par l'origine.

$$y^2[2A\cos.\gamma-B]+2xy(A-C)$$
$$+x^2[B-2C\cos.\gamma]=0$$

Système d'axes conjugués rectangulaires, passant par l'origine.

Deux droites parallèles à des axes conjugués, sont elles-mêmes des axes conjugués.

Deux cordes partant du même point de la courbe et terminées aux extrémités d'un diamètre sont conjuguées.

8° *Diamètres conjugués.*

$$m^3z^2 - 4mL(A+C-B\cos.\gamma]z - 4L^2\frac{\sin.^2\gamma}{\sin.^2 I} = o$$

z = inconnu de l'équation qui a pour racines les carrés de deux demi-diamètres conjugués, fesant entre eux l'angle I.

$$y^2[2A(A-C)+B(B-2A\cos\gamma)]$$
$$+2xy[B(A+C)-4AC\cos.\gamma]$$
$$+x^2[2C(C-A)+A(B-2C\cos\gamma]=o$$

Système d'axes conjugués passant par l'origine parallèlement aux diamètres conjugués égaux, dans l'ellipse.

Les axes principaux et les diamètres conjugués égaux forment un faisceau harmonique.

9° *Pôle, polaire, tangente.*

1° x', y' = coordonnées du pôle.

$(2Ay'+Bx'+D)y+(2Cx'+By'+E)x+ Dy'+Ex'+2F=o$; équation de la polaire correspondante.

Si le pôle est sur la courbe, la polaire est la tangente et le pôle est le point de contact.

2° $py+qx+r=o$, équation d'une polaire.

$$\left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{kr-pn+ql}{mr+pk'+qk} \\[2ex] y' = \dfrac{k'r-qn+pl'}{mr+pk'+qk} \end{array}\right\} \text{coord. du pôle.}$$

Toute droite passant par le pôle et terminée à la polaire, est coupée par la courbe harmoniquement.

Quatre droites formant un faisceau harmonique, les quatre pôles correspondans sont situés harmoniquement sur une même droite *et vice versâ*.

Dans tout quadrilatère inscrit, les intersections des côtés opposés déterminent une droite, qui est la polaire de l'intersection des deux diagonales.

Soient x', y' et x'', y'' les coordonnées de deux points; x, y, les coordonnées du pôle de la droite, passant par les deux points; on aura

$$x = \frac{qk+pl+n}{qm+pk-k'};\ p = \frac{y'-y''}{x'-x''},$$
$$y = \frac{qk'-pn-l}{qm+pk-k'};\ q = \frac{x'y''-y'x''}{x'-x''}.$$

10° *Position d'un point relativement à la courbe.*

x', y'; coordonnées d'un point,
Soit $Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Dy'+Ex'+F=F'$,
Si $F'=0$, le point est sur la courbe,
Si $F'L$ est négatif, le point est hors de la courbe,
$F'L$ est positif, le point est dans l'intérieur de la courbe.

11° *Discussion des courbes.*

$m<0$, $L>0$, ellipse,
id. $L=0$, un point,
id. $L<0$, courbe imaginaire,

$m = 0$, $L > 0$, parabole,
id. $L = 0$, deux droites parallèles ou une droite.
id. $L < 0$, ligne imaginaire,
$m > 0$, $L >$ ou < 0, hyperbole,
id. $L = 0$, deux droites convergentes

12° *Foyers.*

Ellipse et hyperbole,
x', y', cordonnées des foyers,

$$\left.\begin{array}{l} x' = \frac{k}{m} \pm p' \\ y' = \frac{k'}{m} \pm p'' \end{array}\right\} p' \text{ et } p'' \text{ de même signe.}$$

p'^2 et p''^2 racines de l'équation,

$$m^4 p^4 \sin.^2 \gamma - 4m^2 L[(B - 2A\cos.\gamma)\cos.\gamma + A - C)]p^2 - 4L^2(B - 2\cos.\gamma)^2 = 0.$$

Parabole :

$$x' = \frac{k(l+l') - 4EL + 2k'l\cos.\gamma}{8L(A+C-B\cos.\gamma)}$$

$$y' = \frac{k'(l+l') - 4DL + 2kl'\cos.\gamma}{8L(A+C-B\cos.\gamma)}.$$

Abscisse du sommet $= x' - \frac{2A}{k}([Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F]) = p - \frac{AL\sin.^2\gamma}{2(A+C-B\cos.\gamma)^2}$

Ordonnée du sommet $= y' - \frac{2C}{k'}(Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex + F)$.

La somme des distances d'un foyer aux extrémités d'une corde parallèle à l'axe des

foyers, est une quantité constante dans l'ellipse; leur différence est constante dans l'hyperbole.

La somme des cordes conjuguées passant par un foyer ou par les deux est constante dans l'ellipse; et leur différence dans l'hyperbole.

Je ne sache pas que cette propriété soit connue.

La distance d'un point de la courbe au foyer divisée par sa distance à la directrice correspondante, est une quantité nulle dans le cercle et moindre que l'unité dans l'ellipse; égale à l'unité dans la parabole, plus grande que l'unité dans l'hyperbole.

13° *Équation polaire.*

$z =$ distance d'un point de la courbe à l'origine.
$\varphi =$ angle que forme cette distance avec l'axe des x;

$$\varphi' = \gamma - \varphi \text{; on a}$$
$$z = -\tfrac{1}{2}\sin.\gamma$$
$$\left[\frac{D\sin.\varphi + E\sin.\varphi' \pm \sqrt{l\sin.^2\varphi + 2n\sin.\varphi\sin.\varphi' + l'\sin.^2\varphi}}{A\sin.^2\varphi + B\sin.\varphi\sin.\varphi' + C\sin.^2\varphi'}\right].$$

lorsqu'on a $l = l'$ et $n = l\cos.\gamma$,

Le radical devient indépendant de la variable φ; l'origine est alors un foyer, et l'équation devient

$$z = -\tfrac{1}{2}\sin.\gamma\left[\frac{D\sin.\varphi + E\sin.\varphi' \pm \sin.\gamma\sqrt{l}}{A\sin.^2\varphi + B\sin.\varphi\sin.\varphi' + C\sin.^2\varphi'}\right].$$

14° *Asymptotes.*

$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0$; système de droites passant par l'origine, parallèlement aux asymptotes. Lorsque l'axe des x est parallèle à un asymptote, le carré x^2 disparaît de l'équation; il en est de même pour l'axe des y.

Deux diamètres conjugués et les asymptotes forment un faisceau harmonique.

15° *Intersection de deux lignes du second degré.*

Soient les deux équations

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$
$$A'y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F=0$$

Dans ce paragraphe nous désignerons par AB'. le binome $AB'-BA'$ ainsi des autres.

Cela posé, soit :

$$P=\overline{AC'}^2-AB'.BC'$$
$$Q=-2AC'.CD'+BC'.[BD'-AE']+CE'.AB'$$
$$R=-2AC'.CF'+BC'[BF'-DE']+CE'[AE'-BD']+\overline{CD'}^2$$
$$S=2CD'.CF'+BC'.EF'+CE'[DE'-BF']$$
$$T=\overline{CF'}^2-CE'.EF'$$

Éliminant x, il vient

$$Py^4+Qy^3+Ry^2+Sy+T=0$$

16° *Courbes semblables.*

Lorsque deux lignes du second degré sont semblables, l'on a

$$[A+C-B\cos\gamma]^2 m'=[A'+C'-B'\cos.\gamma]m \quad (1)$$

Si les deux lignes sont égales, on a de plus,

$$L'[A+C-B\cos.\gamma]^3=L[A'+C'-B'\cos.\gamma]^3$$

Si deux courbes sont semblables et semblablement situées, on a outre l'équation (1)

$$A+C'=A'+C$$

Si $A + A' = C + C'$, les axes principaux sont perpendiculaires les uns sur les autres.

Si les deux courbes sont égales et dans une position parallèle, l'on a

$A = A'$; $B = B'$, $C = C'$ et $L^2 = L'^2$

L'intersection de deux lignes semblables et semblablement situées est une droite ayant pour équation.

$y[D' - D] + 2[E' - E] + F' - F = 0$; l'autre droite est à l'infini; la droite qui passe par les deux centres a pour équation

$$y[2A[E - E' - B(D - D')] - x$$
$$2C(D - D') - B(E - E')] = DE' - ED'$$

Elle est conjuguée à la droite d'intersection.

Si dans deux courbes données l'on a $D = D'$; $F = F'$,

Alors elles se coupent suivant deux droites, ayant pour équations

$x = 0$

$y(AB' - BA') + x(AC' - CA') + AE' - EA' = 0$

Si donc A'. B'. C' conservent même valeur et qu'on ne fasse varier que E', la seconde droite conservera toujours même direction.

17° *Cercle osculateur.*

Soit une suite de cercles touchant tous une conique donnée en un même point donné, chacun de ces cercles coupera de plus la conique en deux points; la corde qui les joint a la même direction pour tous les cercles (16).

La corde qui passe par le point de contact appartient au cercle osculateur et peut servir à le construire.

Soit $y^2 + Cx^2 + Ex = 0$ l'équation d'une co-

nique rapportée à des axes conjugués ; l'équation du cercle osculateur correspondant à l'origine est

$$y^2 + 2xy\cos.\gamma + x^2 + Ex = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = -\frac{E}{2} \\ y' = \frac{E}{2}\cos.\gamma \end{array}\right\}$$ coordonnées du centre du cercle osculateur ; $r = \frac{E}{2}\sin.\gamma$; r=rayon de courbure.

18° *Lieux géométriques.*

1° Etant données deux coniques, dans un même plan ; soient menés deux diamètres parallèles ; le lieu géométrique de l'intersection des diamètres respectivement conjugués est une troisième conique, passant par les centres des coniques données et par' les six points milieux de leurs cordes communes. Et réciproquement ; en menant par un point de la troisième conique, deux droites aux centres des deux premières, les diamètres respectivement conjugués sont parallèles. Delà on conclut :

a) Le lieu géométrique du centre d'une conique passant par quatre points fixes est une conique ; les six droites passant par ces points, sont un système de trois de ces coniques.

b) Dans tout quadrilatère inscrit, les six milieux des cordes, le centre de la courbe, les points d'intersections des côtés opposés, le point d'intersection des diagonales, sont sur une conique ayant pour centre celui du pa-

rallélogramme qui a pour sommets les points milieux des côtés;

c) Soient A, B, D, C, quatre points d'une conique, O, le centre; M, l'intersection de AC et BD; N, l'intersection de AB et CD; si on mène MQ formant un faisceau harmonique avec MAC, MO, MBD; NP, formant un faisceau harmonique avec NAB, NO, NCD; les droites MQ et NP sont parallèles (par la réciproque de 1°); les quatre pôles du premier faisceau sont sur une même droite (9°); le pôle de MO est à l'infini; donc le pôle. de MQ est au milieu d'une des diagonales du quadrilatère circonscrit passant par les points A, B, C, D; par la même raison le pôle de NP est au milieu de la seconde diagonale; la droite qui joint les milieux de ces deux diagonales a donc pour pôle l'intersection des deux droites parallèles; donc cette droite est un diamètre (*Newt, principia Mathem.* lib. I. Lemm. XXV. corol. 3);

2° Soit ABCD un quadrilatère donné; du point E on mène aux côtés opposés AD, BC deux droites EF, EG sous des angles donnés; et de même aux côtés opposés AB, CD, deux droites EI, EH sur des angles donnés, si le rapport $\frac{EF \times EG}{EI \times EH}$ est constant le point E est sur une conique passant par les quatre sommets du quadrilatère (*Princip. Mat.* lib. I, Sect. V Lemm. XIX);

3° A et B sont deux points fixes; C un point mobile sur une droite donnée; CAM, CBM, sont deux angles donnés de grandeur; le point M décrit une conique (*Princ. Mat.* lib. I, Sect. V. Lemm. XXI);

4° Soient M, A, N, B, les quatre sommets donnés d'un parallélogramme; C un point fixé sur AM; D point fixé sur AN; E point mobile sur BN; F point mobile sur BM; le rapport $\frac{BE}{BF}$ est constant; l'intersection des deux droites CE, DF décrit une conique passant par les quatre points A, B, C, D (Sect. V. Lemm. XX);

5° Soit M un point situé sur une courbe donnée; MQ, l'ordonnée, et AQ l'abscisse du point; O un point fixe situé sur l'axe des ordonnées; D le point où la droite OQ vient couper une parallèle donnée de position, à l'axe des ordonnées; DM' une droite faisant avec OD un angle donné et $DM' = \frac{OD.QM}{OQ}$ le point M', appartient aussi à une courbe de même dégré (Lib. I, Sect. V. Lem. XXII).

C'est à l'aide de ce lemme que Newton transporte les propriétés démontrées pour une certaine courbe, dans une autre de même degré, et change des droites convergentes en parallèles et *vice-versa.* Il appelle ce moyen *figuras in ejusdem generis figuras mutare;* c'est la méthode projective, cylindrique ou conique, des géomètres de l'école de Monge.

19° *Propriété des segmens et de la transversale.*

Une conique est coupée par un polygone de *m* côtés; pour fixer les idées soit M = 4; désignons ces côtés par (1); (2); (3); (4).

$Ay^2 + \ldots Cx^2 + \ldots = 0$ axes (1) ; (2)
$A'y^2 + \ldots Cx^2 - \ldots = 0$ *id.* (3) ; *id.*
$A'y^2 + \ldots C'x^2 + \ldots = 0$ *id.* ; (4)
$A''y^2 + \ldots C'x^2 + \ldots = 0$ *id.* (1) ; *id.*
$A''y^2 + \ldots C''x^2 \ldots = 0$ *id.* *id.* ; (2)

Il est évident que l'on a $A'' = A$; $C'' = C$

Soit p le produit des segmens formés par l'axe des x ; q celui de l'axe des y ;

dans la 1re équation.

p' *id.* q'

dans la 2e.

p'' q''

dans la 3e.

p''' *id.* q'''

dans la 4e.

aussi l'on a

$$\frac{p}{q} = \frac{C}{A}$$

$$\frac{q'}{p'} = \frac{A'}{C}$$

$$\frac{p''}{q''} = \frac{A'}{C'}$$

$$\frac{q'''}{p'''} = \frac{A''}{C'}$$

d'où
$$\frac{pq'p''q'''}{qp'q''p'''} = \frac{A''}{A} = 1.$$

Il en est de même pour un nombre m de côtés et pour une courbe algébrique de degré quelconque ; si $m = 1$, on a la propriété de la *transversale*.

20° *Involution de Desargues.*

Soient trois coniques passant les mêmes quatre points.

$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o$ équat. de la 1re coniq.
$A'y^2+ \qquad F=o$ *id.* 2e.
$A''y^2+ \qquad F=o$ *id.* 3e.

On a donc

$A''=A+mA'$;
$B''=B+mB'$
$C''=C+mC'$

Faisant $y=o$; il vient

$Cx^2+Ex+F=o$ (r, s racines)
$C'x^2+ \qquad =o$; (r', s' *id.*)
$c''x^2+ \qquad =$; o (r'', s'' *id.*)
$C''r''^2+B''r''+F=o$
$C''s''^2+E''s''+F=o$
$Cr''^2+Er''+F+m[C'r''^2+E'r''+F)=o$
$Cs''^2+Es''+F+m(c's''^2+E's''+F)=o$

Eliminant m et considérant que $Cr''^2+Er''+F=C(r''-s)(r''-s)$ et ainsi des autres il vient

$$\frac{(r''-r)(r''-s)}{(r''-r')(r''-s')}=\frac{(s''-r')(s''-s')}{(s''-r)(s''-s')}:$$

Ce qui est la propriété nommée *involution* par Desargues et qu'il est facile d'étendre à toutes les courbes algébriques.

21° *Intersection de deux lignes du même degré.*

Soient deux lignes du degré m; elles ont en général m^2 points d'intersection; si mp de ces

points sont sur une ligne de degré $p < m$; les $m(m - p)$ points restans sont sur une même ligne de degré $m - p$.

En faisant $m = 3$ et $p = 2$, on a le théorème de Pascal, comme cas particulier.

FIN DU MANUEL DE GÉOMÉTRIE.

NOTES.

Note 1, Page 18.

Sur les parallèles.

Le parallélisme de deux droites renferme deux conditions: la première est affirmative, et consiste en ce que les deux droites sont dans un même plan; la deuxième est négative, en ce qu'on dit que les deux droites ne se rencontrent pas. Dans aucune méthode directe de démonstration, on ne fait usage de l'assertion affirmative, aussi aucune n'est-elle entièrement satisfaisante; on ne pourrait même tirer parti de cette condition, qu'autant qu'on connaîtrait les propriétés du plan, indépendamment des parallèles, ce qui n'est possible que lorsqu'on sera parvenu à prouver que deux droites perpendiculaires à un plan, sont dans un même plan. En attendant, les méthodes indirectes, celles qui sont fondées sur l'invariabilité de la somme des angles du triangle, paraissent offrir le plus de chances de succès; car les trois côtes du triangle étant toujours dans un même plan, la première condition entre implicitement comme élément d'argumentation. Mais jusqu'ici on n'a pas encore réussi à démontrer l'invariabilité de cette somme, avec toute la rigueur désirable; M. Legendre, dès la première édition de ses *Elémens de Géométrie*, a solidement prouvé que cette somme ne pouvait jamais dépasser deux an-

gles droits. Mais ne peut-elle rester au dessous? Cette difficulté subsiste toujours; on peut la réduire à celle-ci: il s'agit de trouver un seul triangle ABC dans lequel la somme des trois angles est égale à deux angles droits; car, si cela est vrai pour ce triangle, il le sera aussi pour un triangle quelconque. En effet, un des angles du triangle est nécessairement aigu; supposons que c'est l'angle C, et abaissons de A la perpendiculaire AD sur BC: on aura deux triangles rectangles ADC, ADB, dans chacun desquels la somme des angles est égale à deux angles droits; car si les trois angles de ADC, par exemple, valaient moins que deux angles droits, ajoutés aux trois angles du second, les six angles vaudraient moins que quatre angles droits; or parmi ces six, il y en a deux en D qui sont droits, par conséquent, les quatre angles restans valent donc moins que deux angles droits, ce qui est contraire à la supposition, puisque ces quatre restans forment précisément les trois du triangle ABC: donc la somme des angles, dans le triangle rectangle ADC, est égale à deux angles droits.

Si $AD = DC$, le triangle ADC est isocèle, et l'on aura $ACD = DAC = 45^\circ$; si $AD < DC$, portez AD sur DC de D en E, et menez AE; on démontrera, comme ci-dessus, que la somme des trois angles du triangle rectangle isocèle est égale à deux droits, et que l'on a $AED = DAE = 45^\circ$; prolongeons la ligne AD d'une longueur DF égale à elle-même; le triangle AEF sera rectangle isocèle, et aura la somme de ses angles égale à deux droits; prolongeons encore l'hypothénuse AE d'une longueur EG égale à elle-même, on aura un trian-

gle AFG, rectangle isocèle, avec des angles aigus de 45° ; or, AF = 2 AD ; à l'aide de ce triangle AFG, on pourra en construire un troisième, triangle rectangle, jouissant de la même propriété, et dans lequel le côté de l'angle droit sera double de AF, et quadruple de AD ; et continuant de la même manière, on peut donc trouver un triangle rectangle isocèle, dans lequel la somme des angles est égale à deux angles droits, et où le côté de l'angle droit est plus grand qu'aucune longueur donnée : nous l'appellerons *triangle maximum*. Cela posé, étant donné un triangle rectangle quelconque KLM, on pourra le placer sur le triangle maximum, de manière que les sommets et les côtés des angles droits coïncident. Mais le triangle KLM étant dans l'intérieur du triangle maximum, dont les angles, pris ensemble, valent deux droits ; on démontrera comme ci-dessus que la somme des trois angles doit aussi être égale à deux angles droits ; or, un triangle quelconque peut se décomposer en deux triangles rectangles : donc, en général, s'il existe un seul triangle où cette somme égale deux angles droits, elle a cette même valeur dans tous les autres triangles.

En 1808, j'adressai cette proposition, avec un mémoire sur les parallèles, à feu M. Legendre; l'illustre géomètre me fit l'honneur de me répondre, en date du 1er juillet même année :

» J'ai lu avec beaucoup d'intérêt, Monsieur,
» le mémoire que vous m'avez adressé sur la
» théorie des parallèles; vous y donnez des
» détails curieux et qui supposent beaucoup
» de recherches sur les diverses tentatives qui

» ont été faites pour parvenir à perfectionner
» cette théorie. Cette partie seule du mémoire
» mériterait de voir le jour, indépendamment
» de la théorie qui vous est propre..... Lors-
» que vous prouvez qu'il suffit qu'il existe un
» seul triangle dont la somme des angles soit
» égale à deux droites pour qu'on soit assuré
» que la somme est la même dans tout autre
» triangle, je suis parfaitement d'accord avec
» vous. Je connaissais cette proposition, ainsi
» que je l'ai marqué dernièrement à M. Fran-
» çais. Mais la difficulté est de trouver un
» triangle dans lequel la somme des trois angles
» soit égale à deux angles droits. »

On trouve en effet cette proposition dans le mémoire posthume publié en 1833, sous ce titre : *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle*, par M. Legendre. (Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'institut, tome XII, page 367.)

Il est facile de conclure de ce qui précède que lorsqu'un triangle enveloppe un autre, la somme des angles du triangle est plus grande que la somme des angles du triangle extérieur; car si les deux sommes étaient égales, il faudrait qu'elle fût égale à deux droites et alors la proposition générale serait démontrée. Cela posé, soit ABC un triangle rectangle en B; d'un point I situé entre A et C sur l'hypothénuse, soit abaissée la perpendiculaire IP sur AB ; le pied P de la perpendiculaire tombera nécessairement entre A et B ; la somme des trois angles du triangle AIP est plus grande que celle des trois angles du triangle ACB ; donc l'angle AIP

est plus grand que l'angle ACB; à mesure que le point I approche de A l'angle AIP augmente et en allant vers C il augmente continuellement et jamais même valeur ne peut correspondre à deux positions différentes des points I; par conséquent chaque triangle AIP est entièrement déterminé, lorsqu'on donne l'angle AIP; or, prenant pour unité l'angle droit, chaque angle peut être représenté par un nombre abstrait; il s'ensuivrait que n'ayant pour données que trois nombres abstraits, on en conclurait les longueurs absolues des trois côtés d'un triangle; ce qui est absurde. Donc la somme des angles du triangle API ne peut pas toujours surpasser celle du triangle ABC; ces deux sommes doivent donc parvenir au moins une fois à l'égalité; donc elles sont toujours égales.

Tel est le raisonnement très-ingénieux, tr s-satisfaisant qu'on trouve dans l'écrit de M. Legendre cité ci-dessus : toutefois, il donne la préférence à la théorie des parallèles, exposée par M. Bertrand de Genève, dans *les développemens de la partie élémentaire des mathématiques*. Elle consiste à regarder l'aire comprise entre deux droites parallèles comme une quantité infinie du premier ordre qui doit être regardée comme nulle par rapport à l'aire comprise entre deux côtés d'un angle qui est un infini du second ordre; de même ordre que l'aire d'un plan indéfiniment prolongé. En accordant même libre entrée à cette hiérarchie infinitésimale dans le premier livre de la géométrie élémentaire, il me paraît que cette démonstration est sujette à bien des objections. En effet, le mot *aire*, pour avoir un sens intelligible, doit

exprimer le nombre de fois qu'une figure *fermée* renferme une autre figure *fermée* donnée, par exemple un triangle rectangle isocèle donné; on dit que l'aire d'une figure *ouverte* est infinie, lorsqu'on peut y former des segmens fermés dont l'aire peut surpasser toute aire donnée. C'est ainsi que l'aire de la parabole est dite infinie; car, en menant des cordes, on *démontre* que l'aire des segmens peut dépasser toute limite.

Ces définitions admises, comment sait-on que les aires comprises entre deux droites parallèles, entre deux droites convergentes, sont *infinies?* Est-il possible de démontrer qu'on peut former avec les deux parallèles un espace plus grand qu'aucun autre donné? est-ce à raison de ce que ces espaces s'étendent à l'indéfini? mais certains espaces asymptotiques se prolongent aussi à l'indéfini et l'aire est pourtant finie. Si on ne veut pas admettre la possibilité de l'asymptotisme pour deux droites, alors la théorie des parallèles s'établit de suite sans cet échafaudage; mais il paraît bien difficile de fonder cette théorie sur des rapports entre des aires, quand on veut attacher un sens précis aux mots qu'on prononce; M. Legendre avait fait un semblable essai. Voici ce qu'il m'en dit dans la lettre citée ci-dessus.

« Il faut supposer qu'étant donné un triangle,
» il existe un autre triangle dont l'aire est
» tant de fois qu'on voudra plus grande que
» l'aire du triangle donné. Cette supposition,
» si elle trouve des contradicteurs, n'est peut-
» être pas plus facile à démontrer que la pro-
» position principale pour laquelle on a fait
» tant de circuits. »

Note 2, Page 48.

Si $R^2 = D^2 + r^2$; la corde d'intersection passe par le centre du petit cercle.

$R^2 < D^2 + r^2$	*id.*	au-delà des deux centres.
$R^2 < D^2 + r^2$	*id.*	entre les deux centres.

Note 3, Page 81.

Nous avons conservé la distinction entre les solutions dites *géométriques* et les solutions dites *mécaniques;* non qu'elle soit bonne, mais parce qu'elle est admise. Le compas et la règle étant des instrumens, les opérations qu'on exécute par leurs moyen ne sont pas plus *géométriques* ni moins *mécaniques* que celles qu'on exécute avec d'autres instrumens. Voici, à ce sujet, les paroles de Newton, qu'on lit dans la préface de la première édition (1687) des *principes* :

« Nam et linearum rectarum et circulorum descriptiones, in quibus geometria fundatur, ad *mechanicam* pertinent. Has lineas describere geometria non docet, sed postulat. Postulat enim ut tyro easdem accurate describere prius didicerit, quam limen attingat geometriæ; dein quomodo per has operationes problemata solvantur, docet; rectas et circulos describere problemata sunt, sed non geometrica; ex mechanica postulatur horum solutio, in geometria docetur solutorum usus. Ac gloriatur geometria quod tam paucis principiis aliundè petitis tam multa præstat. »

Sur cette fin, Kant remarque que, par contre, la métaphysique doit être honteuse de ce

qu'elle tire si peu de parti de tant de principes qu'elle peut emprunter aux mathématiques pures (metaphisische autangsgründe der naturwissenschaft. Vorrede); cette plainte du philosophe de Kœnisberg a sa source dans la nature du sujet, et aussi peut-être dans ce qu'il est rare de rencontrer des métaphysiciens qui étudient les mathématiques et des géomètres qui fassent cas de la métaphysique. Cette ignorance et ce dédain sont fort peu philosophiques.

NOTE 4, PAGE 96.

C'est la seconde proposition du sixième livre d'Euclide, il la démontre à l'aide des triangles équivalens; mais il n'est pas nécessaire d'y avoir recours; en effet, soit ABC un triangle, I le milieu de AB; K le point où la parallèle à BC menée par I rencontre AC; L le point où la parallèle à AB menée par K rencontre BC. Il est évident que le triangle KLC est égal au triangle AIK; donc AK = KC; le point K est donc le milieu de AC; de là on conclut facilement: 1° que si le côté AB est partagé en un nombre quelconque de parties égales, les parallèles à BC passant par les points de division, partagent le côté AC en un même nombre de parties égales; 2° si une parallèle à BC partage le côté AB en deux segmens qui soient entre eux dans un rapport rationnel donné, le côté AC sera partagé par cette parallèle en deux segmens qui seront dans le même rapport; 3° de même lorsque le rapport est irrationnel.

Cette forme de démonstration, adoptée

entre autres par Bezout, exige que l'on discute le cas des nombres irrationnels.

Note 5, page 104.

On lit dans la Théodicée de Leibnitz, au paragraphe 214 de la deuxième partie :

« Il y a une espèce de géométrie que M. Jungius de Hambourg, un des plus excellens hommes de son temps, appelait *empirique*. Elle se sert d'expériences démonstratives, et prouve plusieurs propositions d'Euclide, mais particulièrement celles qui regardent l'égalité de deux figures, en coupant l'une en pièces, et en rejoignant ces pièces pour en faire l'autre. De cette manière en coupant, comme il faut, en parties les quarrés des deux côtés du triangle rectangle et en arrangeant ces parties comme il faut, on en fait le quarré de l'hypothénuse, c'est démontrer empiriquement la 47ᵉ proposition du 1ᵉʳ livre d'Euclide. »

Nous croyons que cette géométrie empirique est la plus convenable à l'enseignement primaire.

Note 6, Page 111.

Sur les proportions et progressions harmoniques.

1° Supposons qu'un nombre quelconque de points se succèdent en ligne droite, et, pour fixer les idées, ne prenons d'abord que quatre points A, B, C, E ; les distances des trois derniers au premier sont BA, CA, EA, et les distances inverses sont $\frac{1}{BA}$, $\frac{1}{CA}$, $\frac{1}{EA}$; la

moyenne arithmétique de ces distances inverses sera donc $\dfrac{\dfrac{1}{BA}+\dfrac{1}{CA}+\dfrac{1}{EA}}{3}$.

Prenons sur cette droite un point D, tel que sa distance inverse au point A soit égale à cette moyenne arithmétique ; de sorte que l'on aura

$$\frac{1}{BA}+\frac{1}{CA}+\frac{1}{EA}=\frac{3}{DA}\,(1).$$

D'un point quelconque O situé hors de la droite AE, menons les cinq droites OA, OB, OC, OD, OE, et faisons

$$BA=b,$$
$$CA=c,$$
$$DA=d,$$
$$EA=e,$$
$$OA=r,$$
$$OB=r^{I},$$
$$OC=r^{II},$$
$$OD=r^{III},$$
$$OE=r^{IV},$$

(r, r^{I}) désigne l'angle des droites r et r^{I},
(r, r^{II}) désigne l'angle des droites r et r^{II},
et ainsi de suite.

$h =$ distance perpendiculaire du point O à la droite AE, on aura

$$b=\frac{rr^{I}\sin.(r, r^{I})}{h},$$

$$c=\frac{rr^{II}\sin.(r, r^{II})}{h},$$

$$d=\frac{rr^{III}\sin.(r, r^{III})}{h},$$

$$e = \frac{rr^{IV} \sin.(r, r^{IV})}{h},$$

l'équation (1) devient, après avoir chassé les dénominateurs, $dce + dbe + abc = 3\,bce$; équation qui prend cette forme,

$$ce\,(d - b) + be\,(d - c) + bc\,(d - e) = 0 \quad (2).$$

On a $d - b = \mathrm{BD} = \dfrac{r^{I}\,r^{III} \sin.(r^{I}, r^{III})}{h}$,

$$d - c = \mathrm{CD} = \frac{r^{II}\,r^{III} \sin.(r^{II}, r^{III})}{h},$$

$$d - e = -\mathrm{DE} = \frac{r^{III}\,r^{IV} \sin.(r^{III}, r^{IV})}{h}.$$

Substituant ces valeurs et celles de b, c e dans l'équation (2), les 6 lignes $r, r^{I}, r^{III}, r^{IV}$, h disparaissent par la division, et il reste cette relation entre les sinus des angles

$$\sin.(r, r^{II}) \sin.(r, r^{IV}) \sin.(r^{I}, r^{III}) + \\ + \sin.(r, r^{I}) \sin.(r, r^{IV}) \sin.(r^{II}, r^{III}) - \\ - \sin.(r, r^{I}) \sin.(r, r^{II}) \sin.(r^{III}, r^{IV}) = 0 \quad (3).$$

De l'équation (2) on a déduit la relation (3); et réciproquement, lorsque la relation (3) existe entre les sinus, on peut, rétablissant les facteurs supprimés, remonter à la relation (2); par conséquent, si l'on mène une droite quelconque, rencontrant le faisceau des cinq rayons, r, r', etc., respectivement en A′, B′, C′, D′, E′, on aura encore la relation

$$\frac{1}{\mathrm{B'A'}} + \frac{1}{\mathrm{C'A'}} + \frac{1}{\mathrm{E'A'}} = \frac{3}{\mathrm{D'A'}},$$

pourvu que cette relation subsiste pour une droite AE.

Si, au lieu de prendre quatre points, on en prend un nombre quelconque, on en vien-

dra aux mêmes conclusions ; car la relation (2) est un résultat de combinaisons trois à trois pour 4 points, et en général de $n-1$ à $n-1$ pour n points, et toujours les facteurs r, r', r'' disparaîtront de l'équation.

2° Si on désigne le point D sous le nom de *point de moyenne distance inverse*, on peut renfermer le résultat précédent en cet énoncé.

La projection conique du point de moyenne distance inverse est le point de moyenne distance inverse des points projetés.

3° Lorsque le point A est situé à l'infini, les distances b, c, d, e deviennent égales et infinies, mais les différences $d-b$, $d-c$, $d-e$ restent finies; l'équation (2) se change en celle-ci, $BD+CD-DE=0$; de là on conclut que dans ce cas le centre de moyenne distance inverse est le même que celui de moyenne distance directe, ou le centre de gravité ; l'un est donc toujours la projection de l'autre, et peut servir à le construire.

4° Soit une droite AE divisée en un nombre quelconque de parties égales, par exemple, en quatre parties égales AB, BC, CD, DE ; menons le faisceau OA, OB, OC, OD, OE, on aura

le point B pour moyenne distance inverse des deux points A et C,
C pour moyenne distance inverse des deux points B et D,
D pour moyenne distance inverse des deux points C et E,

par rapport à un point situé à l'infini (3°).

Si on coupe le faisceau par une droite qui rencontre ces rayons aux points A′, B′, C′, D′,

E′, et si nous désignons par K′ le point où cette droite est rencontrée par une parallèle à AE, menée par O, on aura (3°)

B′ pour moyenne distance inverse des deux points A′ et C′,
C′ pour moyenne distance inverse des deux points B′ et D′,
D′ pour moyenne distance inverse des deux points C′ et E′,

par rapport au point K′; donc

$$\frac{2}{B'K'} = \frac{1}{A'K'} + \frac{1}{C'K'},$$

$$\frac{2}{C'K'} = \frac{1}{B'K'} + \frac{1}{D'K'},$$

$$\frac{2}{D'K'} = \frac{1}{C'K'} + \frac{1}{E'K'};$$

de la première équation, on tire facilement celle-ci :

$$A'B'.\,K'C' = A'K'.$$

Ainsi, les points K′, A′, B′, C′ sont disposés harmoniquement; il en est de même des points K′, B′, C′, D, et des points K′, C′, D′, E′; les segmens KA, AB, BC, CD, etc., forment une *échelle harmonique*; et le point C étant celui de moyenne distance inverse des points A, B, D, E, relativement à un point situé à l'infini, on a de même le point C′ et celui de moyenne distance inverse des points A′, B′, D′, E′ relativement à K.

5° Le point de moyenne distance directe jouit de certaines propriétés relativement à un système de forces attractives parallèles, qui lui ont fait donner le nom de *centre de gravité* (voir le *Manuel de Mécanique*); de même, le centre de moyenne distance inver-

se jouit des propriétés analogues, convenablement modifiées, relativement à un système de forces attractives convergentes vers un point; propriétés qu'on peut étendre à des systèmes de forces dont les directions ne sont pas dans un même plan. Voyez le rapport de M. Cauchy sur le mémoire de M. Poncelet, concernant le centre des moyennes harmoniques, dans les annales de Gergonne.

NOTE 7, PAGE 122.

Avec les côtés donnés AB, BC, CD, DA, on peut toujours construire un quadrilatère inscriptible; en effet, soient prolongés les côtés AD, BC jusqu'à leur rencontre en O; désignons les lignes AO, BO et les quatre côtés par les lettres x, y, a, b, c, d. On a évidemment $cx = a(y+b)$; et $cy = a(x+d)$; les lignes x et y sont donc connues, par conséquent le quadrilatère inscriptible est donné; on trouve

$$x = \frac{a(ad+bc)}{(c+a)(c-a)}; \quad y = \frac{a(ab+cd)}{(c+a)(c-a)}$$

soient f, f' les diagonales respectivement opposées aux angles (a, b) et (c, d); $2p$ le périmètre, A l'aire du quadrilatère inscrit, on a $a^2 + b^2 - 2ab \cos.(a, b) = c^2 + d^2 + 2cd \cos.(a, b) = f^2$; d'où

$$\cos.(a, b) = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}$$

$$A = \tfrac{1}{2}(ab+cd)\sin.(a, b) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$f^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

$$f'^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$$

les expressions ff' et $\frac{f}{f'}$ donnent les propriétés connues (page 120)

$$\sin.(f,f') = \frac{2A}{ff'}$$

$$\frac{f+f'}{f-f'} = \frac{(a+c)(b+d)}{(a-c)(b-d)}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{bf-df'}{bf'-df}$$

$$a^2 = \frac{(ff'-bd)(bf-df')}{bf'-df}$$

segment de la diagonale f', compris dans l'angle $(a,b) = \frac{f'ab}{ab+cd}$.

Aire du triangle formé par les côtés $a, b, f =$ $= \frac{Aab}{ab+cd}$.

Soit R le rayon du cercle circonscrit à ce triangle et aussi au quadrilatère; on aura

$$R = \frac{f(ab+cd)}{4A} = \frac{f'(ac+bd)}{4A}$$

donc $R^2 = \frac{ff'(ab+cd')(ac+bd)}{16A^2} =$

$$= \frac{(ad+bc)(ab+cd)(ac+bd)}{16A^2} =$$

Changeons 1° c en b et *vice versâ*; 2° c en d et *vice versâ*; on a deux nouveaux quadrilatères $acbd$, $abdc$ inscrits dans le même cercle de rayon R; le deuxième quadrilatère a pour

diagonales f' et f'' ; f'' est la diagonale opposée à l'angle (b, d); le troisième quadrilatère a pour diagonale f et f'', et l'on a

$$f''^2 = \frac{(ab+cd)(ad+bc)}{ac+bd}$$

d'où $$R = \frac{ff'f''}{4A}$$

(Voir. Grebe, de quadrilatero circulari observationes quædam, page 6, Marburgi, 1831, in-4°.)

L'aire du trapèze en fonction des côtés se conclut facilement de celle du quadrilatère inscrit; en effet, portant OB de O en I sur OD et OA de O en I' sur OC, on obtient un trapèze IDCI' équivalent au quadrilatère inscrit. Soient a, b, c, d, les côtés consécutifs d'un trapèze, b la petite base et d la grande base; s le $\frac{1}{2}$ périmètre, $K = \frac{b(c-a)}{da}$, A l'aire, on aura

$$A = \sqrt{(s-a+k)(s-b)(s-c-k)(s-d)} =$$
$$= \frac{d-b}{d+b}\sqrt{(s-a-b)(s-b)(s-c-b)(s-d)}$$

Note 8, Page 163.

On dit que deux systèmes d'objets sont semblables lorsque, en allant dans chaque système d'un de ces objets à l'autre, dans le même ordre, on les trouve placés de la même manière les uns par rapport aux autres, et que leurs grandeurs sont proportionnelles. Egalité de position et proportionnalité de grandeur, sont les conditions de la similitude. C'est la définition ordinairement adoptée par les géomètres. Elle est la première

du sixième livre d'Euclide. Legendre a fait ressortir les inconvéniens de cette définition, surtout quand il s'agit des polyèdres ; elle est même difficilement applicable aux lignes et aux surfaces courbes ; alors on a forcément recours au centre de similitude; on pourrait suivre la même marche pour les droites et les plans; c'est le parti qu'a adopté M. Vincent dans la troisième édition de ses élémens de géométrie.

Note 9, Page 172.

Cercle tangent à trois autres.

Viète est le premier qui se soit servi des propriétés du centre de similitude pour résoudre les problèmes sur les contacts des cercles; mais la solution la plus directe et la plus générale a été donnée par Newton : elle consiste à obtenir le centre du cercle cherché, au moyen de l'intersection de deux hyperboles *confocales*, c'est-à-dire qui ont un foyer en commun ; et cette intersection est ramenée à celle de deux droites, nommées *directrices*; ce qui dispense de construire les courbes. Nous avons donné d'abord la méthode du géomètre anglais, et ensuite celle de Viète, qui a été très simplifiée par l'introduction des axes radicaux. Ces nouveaux procédés, dus à M. Gautier, ont gagné en clarté par l'exposition qu'en a donnée un anonyme dans le receuil de M. Gergonne. Il considère l'axe radical comme un ligne à la fois *homologue* aux deux polaires de deux cercles, par rapport à un troisième qui les touche; nous avons suivi la même marche, et nous l'avons conservée même pour les cas particuliers où les cercles se réduisent à des points ou

deviennent des droites. Lorsqu'il existe des tangentes communes, la ligne disomologue divise évidemment ces tangentes en parties égales, puisqu'elle jouit de la propriété énoncée (168). Ainsi, on a mené la disomologue XN par les milieux des tangentes communes, LL, KK, et YN par les milieux des tangentes communes Ss''', $R'r'''$. (*Fig.* 73.) Dans la *fig.* 74, le cercle C''' se change en droite, et la disomologue de C''' et de C se confond avec la droite ; car (*fig.* 72), lorsque CI devient infini, le cercle C se confond avec sa tangente ZIX, et le point X, intersection des deux tangentes ZX, YX, restera toujours sur la première de ces droites.

Le procédé de Newton est applicable aux surfaces de révolution du second degré et *cantocales* et sert à construire le centre de la sphère tangente à quatre sphères données ; les directrices sont remplacées par des plans directeurs ; problème résolu pour la première fois par Fermat.

Nous allons donner quelques formules relatives aux contacts des cercles :

Notation.

R', R'', R''' = rayons de trois cercles donnés,
R = rayon d'un cercle tangent aux trois ;
$x', y', x'', y'', x''', y'''$, coordonnées des trois centres donnés,

u''', v''', coordonnées du centre de similitude extérieur des cercles R' et R'',
u'', v'' *id.* R' et R''',
u', v' *id.* R'' et R''',

X, Y, coordonnées du point de rencontre des trois disomologues (axes radicaux).

$X^2+Y^2=Z^2$

L'origine est fixée au centre du cercle qui passe par les trois centres donnés; les axes sont rectangulaires.

Soient

$R'-R''=d'''$

$R''-R'''=d'$

$R'''-R'=d''$

$R'^2-R''^2=\delta'''^2$

$R''^2-R'''^2=\delta'^2$

$R'''^2-R'^2=\delta''^2$

$M'=x'd'+x''d''+x'''d'''$

$M=y'd'+y''d''+y'''d'''$

$N=x'\delta'^2+x''\delta''^2+x'''\delta'''^2$

$N'=y'\delta'^2+y''\delta''^2+y''\delta'''^2$

$S=$ le double de l'aire du triangle ayant pour sommets les trois centres donnés,

on aura

$d'+d''+d'''=0$

$\delta'^2+\delta''^2+\delta'''^2=0$

$R'd'+R''d''+R'''d'''=0$

$MN'-M'N=d'''d'd''S$

$x'^2+y'^2=x''^2+y''^2=x'''^2+y'''^2=r^2$

$$u'''=\frac{R'x''-R''x'}{d'''}$$

$$v'''=\frac{R'y''-R''y'}{d'''}$$

$$u''=\frac{R'''x'-R'x'''}{d''}$$

$$v''=\frac{R'''y'-R'y'''}{d''}$$

$$u' = \frac{R''x''' - R'''x'}{d'}$$

$$v' = \frac{R''y''' - R'''y''}{d'}$$

$d'u' + d''u'' + d''u''' = -M$
$d'v' + d''v'' + d'''v''' = -M'$
$M(y - v') = M'(x - u')$; [A] équation de la droite qui contient les trois centres de similitude extérieurs.

En changeant successivement le signe de R′, R″, R‴, on obtient les équations des droites relatives aux centres de similitude intérieurs.

2° *Lignes disomologues* (axes radicaux).

$$2x(x' - x'') + 2y(y' - y''') + \delta'''^2 = 0$$

relative aux cercles R′, R″,

$$2x(x' - x''') + 2y(y' - y''') + \delta''^2 = 0$$

relative aux cercles R′, R‴,

$$2x(x'' - x''') + 2y(y'' - y''') + \delta'^2 = 0$$

relative aux cercles R″, R‴,

$$X = \frac{N'}{2s}$$

$$Y = -\frac{N}{2s}$$

3°. *Cercle de contact.*

Le centre du cercle tangent qui enveloppe les trois cercles donnés est sur la droite, qui a pour équation $2M'y + 2Mx = d'd''d'''$; [B].

1° Si le cercle tangent laisse les trois cercles en dehors, il suffit de prendre négativement R′, R″, R‴ ; alors d', d'', d'', M, M′ changent de signe et l'équation [A] reste la même ; donc cette droite passe par les centres de deux cercles de contacts.

2° Les valeurs de X et de Y satisfont à l'équation [B]; donc cette droite passe par le point de rencontre des trois lignes disomologues.

3° Les deux droites données par les équations [A] et [B] sont perpendiculaires. Quatre droites correspondent à l'équation [A]; il y en a autant pour (B); or chacune de ces dernières contient deux centres; il y a donc en général huit solutions.

4° *Rayon du cercle de contact.*

Ce rayon est donné par l'équation

$PR^2+QR+T=0$

$P=M^2+M'^2-S^2,$

$Q=2S[M(y'-Y)-M'(x'-X)+R'S],$

$T=S^2[Z^2+r^2-R'^2-Z(x'Y+y'X)],$

5° *Coordonnées du centre du cercle de tangent et le point de contact.*

$Sx=MR+SX,$

$Sy=-M'R+SY,$

x, y; cordonnées du centre du cercle tangent.

Soient C' le centre du cercle R', C le centre du cercle R cherché, I le point de contact, de sorte que CIC' est une droite, O point d'intersection des trois disomologues; L point d'intersection de la droite OI avec la parallèle à la droite CO, menée par C'; on a évidemment $\frac{C'I}{C'L}=\frac{CI}{CO}.$

mais $\frac{CI}{CO}=\frac{\sqrt{(x-X)^2+(y-y)^2}}{R}=$

$$= \frac{S}{\sqrt{M^2+M'^2}}$$

et $C'I = R'$, donc $C'L$ est connu ; l'intersection OL avec le cercle C' donne les deux points de contact. Cette analyse et les méthodes géométriques générales sont en défaut lorsque les centres des cercles donnés sont en ligne droite ; ce cas particulier est facile à traiter directement ; par un changement de coordonnées, on pourrait aussi déduire ces solutions des formules générales.

Le même genre d'analyse peut s'étendre à quatre sphères ; voir journal de l'école Polytechnique ; .

Note 10, Page 195.

Exercices de trigonométrie plane.

PREMIER EXEMPLE.

$AC = 800$,
$BC = 320$,
$ABC = 128^\circ\, 4'$; on a
$BAC = 18^\circ\, 21'$

DEUXIÈME EXEMPLE.

$AC = 800$,
$AB = 562$,
$BC = 320$; on a
$ABC = 128^\circ\, 4'$.

Trigonométrie sphérique. — Analogies de Néper.

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}C.\ \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(a-b)}{\cos.\ \frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A-B) = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}C,\ \frac{\sin.\ \frac{1}{2}(a-b)}{\sin.\ \frac{1}{2}(a+b)}$$

NOTE 11, PAGE 201.

1° Faisant $R = 1$; on a
$2B - 2A = Q - P \cos. \frac{1}{2} C$,
or la différence $2B - 2A$ peut devenir plus petite qu'aucune quantité donnée; donc aussi et à *fortiori* $Q - P$.

2° Lorsque C surpasse $98° 4'$ on a $\frac{1}{2}(A + B) > A''$; et π est plus près de A que de B; mais lorsque C est moindre que $98° 4'$ alors $\frac{1}{2}(A + B) < A''$ et π est plus près de B que de A; lorsque $C = 98° 4'$; on a à très-peu près $\frac{1}{2}(A + B) = A''$

3° L'arc de $56° 34' 50''$ divise à très-peu près en deux parties équivalentes l'aire du trapèze formé par le sinus, le sinus-verse, la tangente et le prolongement de la sécante.

4° On a $A + B = \frac{1}{2} Q + \frac{1}{2} P \cos. \frac{1}{2} C$; or le premier membre va toujours en croissant et à fortiori $\frac{1}{2} Q + \frac{1}{2} P$; π est généralement plus près de B que de A; il est donc aussi plus près de Q que de P.

Méthode des aires équivalentes pour trouver π.

Soit A = aire d'un polygone régulier de n côtés
R = rayon du cercle circonscrit,
r = *id.* inscrit,
B = aire d'un polygone régulier de $2n$ côtés équivalent à A.
R' = rayon du cercle circonscrit,
r' = *id.* inscrit,
on aura; $r = R \cos. \frac{1}{2} C$,

$$A = \frac{1}{2} n R^2 \sin. C,$$
$$B = n R'^2 \sin. \frac{1}{2} C,$$

$$B = A\text{; d'où}$$
$$Rr = R'^2,$$
$$R - r' = \frac{r(R-r)}{2\sqrt{Rr + \sqrt{2r(R+r)}}}\text{; d'où}$$
$$\frac{R'-r'}{R-r} < \tfrac{1}{4}$$

Cette méthode d'approximation est plus prompte que celle des polygones inscrits et circonscrits de Jacques Grégory.

Méthode des périmètres équivalens (Schwab).

P = périmètre d'un polygone régulier de n côtés; R, r comme ci-dessus,
B = périmètre d'un polygone régulier de $2n$ côtés; R′, r'; comme ci-dessus.
$B = P$;

$$2n\,R\sin.\tfrac{1}{2}C = 4nR'\sin.\tfrac{1}{4}C$$
$$R\cos.\tfrac{1}{4}C = R';$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}C = \frac{r}{R};\ \cos.\tfrac{1}{4}C = \frac{r'}{R'};\ \cos.^2\tfrac{1}{4}C = \frac{R+r}{2R} = \frac{r'^2}{R'^2}$$
$$R'^2 = Rr'$$
$$r' = \frac{R+r}{2}$$
$$\frac{R'-r'}{R-r} = \frac{(R+r)}{2(R+r+\sqrt{2R(R+r)})}\text{; de là}$$
$$\frac{R'-r'}{R-r} < \tfrac{1}{4}$$

Toutes ces méthodes exigent une suite de moyennes proportionnelles arithmétiques et géométriques.

M. Schwab, mort à Nancy, en 1813, est

auteur de la méthode des périmètres équivalens. On la trouve dans l'ouvrage suivant : *Elémens de géométrie, où la théorie de la ligne droite et des parallèles est démontrée rigoureusement, avec un nouveau moyen d'approcher plus promptement du rapport de la circonférence au diamètre;* par J. Schwab, *première partie, Géométrie plane*; Nancy 1813, in-8; la seconde partie est inédite. Le manuscrit près d'être livré à l'impression appartient à M. Schwab fils, fabricant d'instrumens de précision à Nancy.

Note 12, Page 205.

Cette belle proposition est du célèbre docteur Gauss, qui l'a publiée en 1801, dans un ouvrage intitulé : *Disquisitiones Arithmeticæ, Lipse*; et traduit en français par M. Poulet Delisle.

On peut consulter aussi la seconde édition de la théorie des nombres de Legendre.

Note 13, Page 213.

Je dois cette proposition à M. Ensheim, mon premier professeur de mathématiques; ce vénérable vieillard, arrivé à un âge très-avancé, vit à Bayonne retiré au sein de la famille Furtado. Je saisis avec empressement cette unique occasion d'exprimer ma reconnaissance à un homme très-distingué par la profondeur et la variété de ses connaissances et surtout par une grande élévation de pensée et de caractère : une haute intelligence est sans doute un objet d'admiration; mais le respect n'est dû qu'à la vertu. M. Ensheim a droit à notre admiration et à nos respects.

Note 14, Page 230.

Deux droites A et B, n'étant pas dans un même plan, soient C un point pris sur la première, et D un point pris sur la seconde droite; si l'angle DCA n'est pas droit, on pourra de D abaisser une perpendiculaire sur la droite A, perpendiculaire qui sera plus courte que la distance CD; de même, si l'angle CDB n'est pas droit, la perpendiculaire abaissée de C sur la droite B sera plus courte que CD: donc la distance la plus courte doit être à la fois perpendiculaire sur les deux droites.

Si, par les point quelconque C, on mène une parallèle B' à la droite B, et par le point quelconque D une parallèle A' à la droite A, le plan passant par la droite A et B' sera parallèle au plan déterminé par les droites B et A'; la plus courte distance de ces deux plans est égale à celle des deux droites A et B; en effet, soit CD cette plus courte distance; étant perpendiculaire sur A et B, elle le sera aussi sur les parallèles A' et B': donc elle sera perpendiculaire aux deux plans parallèles; par conséquent elle mesure leur plus courte distance.

Si, par la droite A, on abaisse un plan perpendiculaire sur le plan (B, A'), ce plan perpendiculaire passera par la plus courte distance CD; il contient donc le point D; par conséquent, ce point se trouvera sur l'intersection du plan perpendiculaire avec la droite B; de même le point C est à l'intersection de la droite A avec le plan mené par B perpendiculairement sur le plan (A, B').

Soient AB, BC, CD, DE, etc., les côtés consécutifs d'une portion de polygone *gauche*, c'est-à-dire dont trois côtés consécutifs ne sont pas dans un même plan; et soit de même A′ B′ C′ D′ E′, une portion d'un autre polygone gauche; pour trouver la plus courte distance de ces deux polygones, il faut d'abord combiner successivement le côté AB avec chacun des côtés AB′, B′C′, C′D′, etc. du second polygone, et chercher leurs plus courtes distances, et rejeter celles dont les points tombent sur les prolongemens des côtés, et prendre la plus courte de toutes les autres; ensuite on combinera de même BC, successivement avec tous les côtés du second polygone, et on choisira la plus courte de ces plus courtes distances partielles; de là on conclut que pour trouver la plus courte distance des deux lignes courbes, il faut chercher toutes les distances qui sont à la fois perpendiculaires aux tangentes qui passent aux intersection de ces distances avec les courbes, et prendre ensuite la plus courte de ces distances.

On démontre de même que pour trouver le plus court chemin d'une surface à une autre, il faut chercher les distances qui sont à la fois perpendiculaires aux plans tangens qui passent par les points d'intersection de ces distances avec les surfaces, et prendre la plus courte de ces distances.

Le plus court chemin pour aller d'une ligne à une surface est mesuré sur une droite normale à la ligne et à la surface.

Lorsque les lignes ou les surfaces présentent à la fois l'une à l'autre des parties concaves et convexes, les lignes normales mesurent tantôt

les plus courtes distances de la concavité à la concavité, de la convexité à la convexité, de la concavité à la convexité, etc. Il est aisé de vérifier ces résultats sur les droites, les plans, les cercles et les sphères.

On peut déduire de ceci une nouvelle expression pour le volume de la pyramide triangulaire : soient comme ci-dessus :

E et F deux points situés sur la droite A et
E′, F′ id. B

ces quatre points peuvent être considérés comme les sommets d'un tétraèdre : soit CD la plus courte distance des deux droites A et B, le volume du tétraèdre est évidemment égal au volume du tétraèdre E C E′ F′ plus celui du tétraèdre FC E′F′.

La base commune à ces deux tétraèdres a pour aire $\frac{1}{2}$ CD. E′F′ ; la hauteur du premier est égale à EC multiplié par le sinus de l'angle que fait cette droite avec la base CE′F′ ; angle qui est évidemment égal à celui que fait EC ou EF avec CE′F′; de là on conclut facilement que le volume d'un tétraèdre quelconque est égal au sixième du produit de deux arêtes opposées par le sinus de leur angle et par leur plus courte distance.

NOTE 14 (*bis*), PAGE 256.

Camper, dans une dissertation très curieuse publiée sur les conditions auxquelles doit satisfaire une bonne chaussure, paraît avoir été le premier qui ait fait sentir l'inconvénient de faire les deux souliers, de droite et de gauche, sur une même forme; et, par conséquent *égaux par superposition*; tandis que

les deux pieds sont égaux par symétrie. Cette différence est plus sensible entre les deux mains; tout le monde sait que le gant de droite ne peut entrer dans le gant de gauche.

La dissertation de Camper est jointe à la traduction donnée en 1791, par Jansen, de la dissertation du même auteur sur les variétés de la physionomie humaine.

Note 15, Page 271.

La méthode de Cavalleri, dite des indivisibles, est une application tacite de ces principes; c'est Wallis, un des génies les plus extraordinaires d'un siècle si fécond en hommes de génie, c'est cet illustre géomètre qui a le premier énoncé ces principes dans un ouvrage où l'on trouve les applications du calcul intégral, avant l'existence de ce calcul : pour évaluer les aires, il compare des surfaces courbes à des triangles; p-e. les conoïdes aux triangles (Prop. 3 et 4); de même pour les volumes; voici le titre de son ouvrage : *Johannis Wallisii SS. Th. D. geometriæ professoris saviliani in celeberrima academia oxoniensi, arithmetica infinitorum, sive nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam, aliaque difficiliora matheseos problematas, Oxonii, anno* 1656. *in*-4. Wallis avait connaissance de la méthode du professeur de Bologne. Voici ce qu'il en dit: *Exeunte anno* 1650 *incidi in Torricellii scripta mathematica (quæ, ut per alia negotia licuit, anno sequente* 1651 *evolvi) ubi inter alia, Cavallerii geometriam indivisibilium exponit. Cavallerium ipsum nec ad manum habui et apud biblio-*

polas aliquoties frustra quæsivi. (*Præf.*) L'ouvrage de Cavalleri est de 1635, voici le titre. *Geometria indivisilibus continuorum novâ quadam ratione promota;* vol. in-4.

Note 16, Page 293.

La quadrature d'un cône circulaire oblique dépend en général de celle d'une courbe du troisième degré; lorsque le cône est droit et elliptique, sa quadrature dépend d'un arc d'ellipse et dans certains cas d'un arc de cercles. (D'Alembert. opuscul. mathémat, tome 1, page 237); et Legendre, fonctions elliptiques, tome 1, page 329.

La quadrature revient à celle du cercle, lorsque le cône ayant pour base une ellipse fait partie d'un cône circulaire droit. En effet, soit une pyramide régulière coupée par un plan oblique à l'égard de l'axe, l'aire de la surface convexe dela pyramide retranchée est évidemment égale au volume de cette pyramide divisé par le tiers de la distance d'une quelconque des faces au point où l'axe rencontre le plan coupant; il en est de même pour le cône. La proposition est de Barrow. On la trouve dans ses *Lectiones geometricæ*.

Note 18, Page 313.

Albert Girard est le premier qui ait indiqué l'aire du triangle sphérique rectangle. Elle est consignée dans une brochure très-rare et intitulée, *Invention nouvelle en algèbre*, 1629; il prend le titre de Samielois, probablement de St.-Mihel, dans le département des Vosges. Sa démonstration est très-mauvaise et à peu près inintelligible. Mais c'est au P. Bonaven-

ture Cavalléri, jésuate italien (a), professeur d'astronomie à Bologne, et dont il a été question dans la note 16, qu'on doit vraiment la connaissance de l'aire du triangle sphérique; il ne connaissait pas le théorême d'Albert Girard; plaçant la célèbre proposition dans le dernier chapitre de son ouvrage, il en donne cette singulière raison : « *Illudque, hoc postremo capite non incongrue fuit reservandum, quo sublatis dapibus quibus in mensa communiter vesci consuescimus, his exempta fames, novo hoc cibo restituta, famelici potius quam saturi ab astronomica mensa discedamus.* » L'abbé de Gua, à qui nous empruntons le sujet de cette note, remarque avec raison qu'il faut lire *exempta fame* (mém. de l'Académie des sciences de Paris, 1783). De Gua donne aussi le moyen de trouver cette aire par le calcul intégral.

Note 19, Page 324.

Corps réguliers.

Désignons le tétraèdre par la lettre initiale T,
octaèdre O,
icosaèdre I,
hexaèdre ou cube H,
dodécaèdre D.

Soient R le rayon de la sphère circonscrite, et posons $R = 1$,
C le côté d'un quelconque des corps réguliers,
A l'aire d'une face,
r le rayon du cercle circonscrit à cette face,
S la solidité du corps.

On aura ces valeurs :

(a) L'ordre des jésuates est différent de celui des jésuites.

2°. C.

T; $2\sqrt{\frac{2}{3}} = 1,632993$

O; $\sqrt{2} = 1,414214$

I; $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = 1,051462$

H; $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154701$

D; $\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = 0,713644,$

2°. A.

T; $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154701$

O; $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866025$

I; $\frac{3(5-\sqrt{5})}{10\sqrt{3}} = 0,478727$

H; $\frac{4}{3} = 1,333333$

D; $\frac{\sqrt{5}}{6}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 0,876218$

3° *r*.

T, $\frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,942809$

$$O; \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816496$$

$$I; \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}} = 0,607062$$

$$H; \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816496$$

$$D; \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}} = 0,607062$$

4° S.

$$T; \frac{8}{\sqrt{3}} = 0,513200$$

$$O; \frac{4}{3} = 1,333333$$

$$I; \frac{2}{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2,536150$$

$$H; \frac{8}{3\sqrt{3}} = 1,539600$$

$$D; \frac{2(5+\sqrt{5})}{3\sqrt{3}} = 2,785164$$

Lorsque R n'est pas égal à l'unité, il faudra multiplier les valeurs de C et de r par R; celles de A par R^2, et celles de S par R^3.

Note 20, Page 344.

En donnant plus d'extension à l'acception du mot *projection*, on peut, au lieu de prendre un plan pour surface de projection,

choisir une surface quelconque; la projection d'une ligne sur cette surface sera alors l'intersection de cette surface avec le cône qui a la ligne donnée pour directrice, et un point fixe pour sommet. Par exemple, si on prend la sphère pour surface de projection, et son centre pour sommet, les droites se projetteront sur cette sphère, suivant des arcs de grands cercles; et toutes les propriétés démontrées sur des droites dans un même plan, peuvent ainsi se transporter sur la sphère; il en est de même des propriétés des segmens: en effet, supposons qu'il existe une relation donnée entre les segmens formés sur les côtés d'un polygone; chaque segment est égal à la moitié du produit des rayons qui aboutissent à ses extrémités, multiplié par le sinus de l'angle que font ces rayons et divisé par la distance du sommet fixe au segment; si en substituant ces valeurs dans la relation, les rayons et les distances disparaissent, alors on aura une relation entre les sinus des angles; or, ces angle sont mesurés par les côtés du polygone sphérique, qui est la projection du polygone rectiligne: on aura donc une relation entre les sinus des segmens du polygone sphérique; c'est ainsi qu'on démontre que les relations (p. 117) ont également lieu pour un triangle sphérique; mais, au lieu des segmens, il faut prendre leurs sinus.

Note 21, Page 370.

L'application de la théorie générale des équations à la recherche des lignes et des surfaces a été commencée par Descartes; ensuite,

à l'aide des relations découvertes par Newton, entre les coefficiens et les racines des équations, Euler a considérablement perfectionné la méthode de Descartes, qui a encore pris une grande extension par les travaux des géomètres cités dans le texte. Nous croyons utile d'indiquer les principales propositions, et de les ranger dans un ordre tel, que les unes puissent servir a démontrer les autres; quelquefois nous indiquerons succinctement la marche à suivre. Il ne s'agit ici que de courbes et de surfaces algébriques, ou, ce qui revient au même, de celles qui sont rencontrées par une droite en un nombre fini de points.

1° Le degré de l'équation d'une ligne ou d'une surface à coordonnées parallèles ne change pas en déplaçant l'origine, en changeant les directions des axes des coordonnées, ou en projetant les lignes coniquement sur un plan.

2°. L'équation générale d'une ligne du degré m renferme $\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1 = \frac{m(m+3)}{2}$ coefficiens; celle d'une surface contient

$$\frac{(m+1)\ m+2)\ (m+3)}{1.2.3} - 1 = \frac{m(m^2+6m+11)}{1.2.3}$$

coefficiens. Les lignes et les surfaces sont déterminées par autant de *conditions indépendantes* que leurs équations renferment de coefficiens.

Lorsque m surpasse 3, on a $m^2 > \frac{m(m+3)}{2}$; cependant on peut trouver m^2 point par lequel passent deux lignes de l'ordre m; mais ces points ne peuvent être pris au hasard; ils

sont assujettis à certaines conditions; lorsqu'elles sont remplies, on peut faire passer par les mêmes points une infinité de lignes de l'ordre m; mais m^2+1 points, déterminent complètement la ligne de degré m.

3°. Le degré de l'*équation polaire* d'une ligne et d'une surface, considéré relativement au rayon vecteur, est le même que celui de l'équation à coordonnées parallèles; ce degré ne change pas en déplaçant le pôle, les axes ou les plans fixes, à partir desquels on compte les angles.

4° L'équation d'une ligne ou d'une surface d'un degré mn peut, pour certaines relations particulières entre les coefficiens, représenter le système de m lignes ou surfaces du degré n ou de n lignes de l'ordre m, et par conséquent une équation du degré p peut, dans certains cas, représenter le système de p droites ou de p plans; et réciproquement, un système de p droites ou de p plans représente une ligne ou une surface du degré p, et toutes les propriétés de cette ligne appartiennent au système.

5° Deux lignes, l'une du degré m et l'autre du degré n, ne peuvent avoir plus de mn points en commun; les abcisses des points d'intersection sont les racines d'une équation du degré mn. Il en est de même des ordonnées. Les fonctions symétriques des racines étant toujours réelles, il s'ensuit qu'on peut construire ces fonctions, lors même que des racines deviennent imaginaires et répondent à des intersections devenues impossibles.

6° Si on multiplie dans l'équation d'une ligne du degré m les termes de puissance m

métriques, on trouverait pour chacune des propriétés différentes se rapportant aux coordonnées des points d'intersection; c'est ainsi que la considération du dernier terme de l'équation d'intersection, qui est le produit de toutes les racines, donne la propriété des segmens, qu'on a démontrée pour les courbes du second degré (p. 356), et qui peut se généraliser pour toutes les courbes.

Comme le nombre des fonctions symétriques est infini, il s'en suit que les propriétés relatives aux intersections des lignes sont inépuisables. On doit dire la même chose des intersections de surfaces.

11° Toutes les questions relatives aux contacts et aux osculations des lignes dépendent d'équations d'intersection qui ont des racines égales, ou, ce qui revient au même, elles se résolvent par des éliminations entre des fonctions primitives et leurs dérivées de divers ordres. Or, l'équation d'une ligne étant du degré m en x et y, le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ est égal à une fonction du degré $m-1$ divisée par une autre fonction φ aussi du degré $m-1$, et le coefficient différentiel de l'ordre n est égal à une fonction du degré $(2n-1)(m-1)-n+1$ divisée par la même fonction φ élevée à la puissance $2n-1$; de là on conclut que,

12° On ne peut mener plus de $m(m-1)$ tangentes, parallèles à une droite donnée.

13° Par un point donné (x', y'), on ne peut mener plus de $m(m-1)$ tangentes; car il faut égaler la fonction fractionnaire $\frac{dy}{dx}$ à $\frac{y-y'}{x-x'}$;

chassant les dénominateurs, on obtient une équation du degré m, qui se réduit au degré $m-1$; car les termes du degré m sont égaux à ceux du même ordre de la proposée, multipliés par m : donc tous les points de contact sont sur une courbe du degré $m-1$. L'intersection de cette courbe avec la proposée donnera $m(m-1)$ points de contact.

Cette proposition est d'ailleurs une conséquence de la précédente; car les tangentes convergentes sont les projections de tangentes parallèles.

14° Une ligne du degré m ne saurait avoir plus de $m(m-1)(2n-1)$ points où les coefficiens différentiels de l'ordre n soient égaux à une quantité donnée.

15° Le carré du rayon osculateur d'une ligne plane est égal à une fonction des coordonnées du degré $6m-6$ divisée par une fonction du degré $6m-8$, et les coordonnées des centres de courbures sont égales à des fonctions du degré $3m-3$ divisées par une fonction du degré $3m-4$; de là on conclut que

16° La développée ne peut dépasser le degré $3m(m-1)$.

17° Par le même point ne peuvent passer plus de $m(3m-2)$ cercles osculateurs, ni plus de m^2 normales.

18° Deux lignes de degré m et n ne peuvent avoir plus de $mn(m-1)(n-1)$ tangentes communes; même démonstration que pour (13°).

19° Si d'un point A situé sur une ligne du degré p, on mène des tangentes à une ligne de l'ordre m, les points de contact sont situés sur

une ligne de l'ordre $m - 1$ (13°.); à chaque position du point A répond une autre courbe de points de contact; toutes sont tangentes à une courbe du degré $(m+p-2)^2$. Dans le cas particulier où $p = 1$, cette dernière ligne se réduit à $(m - 1)^2$ points par lesquels passent constamment les courbes de contact.

Si m droite, et une ligne du second degré sont situées dans un même plan; si ces droites touchent une ligne du degré n; les pôles de ces lignes pris par rapport à la courbe du second degré, appartiennent à une ligne du degré m.

Ces proposition avec leurs réciproques renferment la théorie générale des pôles et polaires.

20° Si d'un point fixe on mène des tangentes à un système de courbes semblables du degré m et semblablement placées, tous les points de contact sont sur une même courbe du degré $m(m-1)$.

21° Il est facile d'étendre ces propositions aux intersections des lignes et des surfaces, et des surfaces entre elles.

Une ligne plane de degré m tournant autour d'une droite située dans son plan engendre une surface de degré $2m$; si l'axe de rotation coupe la courbe génératrice en deux parties égales et symétriques, la surface engendrée est du degré m.

22° Tout plan coupe une surface de l'ordre m suivant une ligne du même degré; si l'équation d'intersection admet un facteur rationnel linéaire, l'autre facteur sera du degré $m - 1$: donc tout plan passant par l'élément rectiligne A d'une surface réglée, la coupe suivant une

courbe plane de l'ordre $m - 1$; soit I le point où l'élément rectiligne coupe la courbe, la tangente à cette courbe en I sera dans le plan tangent, qui passe aussi par la droite A; mais cette tangente et la droite A sont aussi dans le plan sécant : donc ce plan sécant est lui-même tangent, et le point de contact est en I; c'est le cas des surfaces gauches. Mais si la droite A est tangente à la courbe en I, alors le plan tangent ne se confond plus avec le plan sécant, la droite A est une droite de contact : c'est le cas des surfaces développables. Pour avoir le plan tangent, il faut faire une seconde section, qui ne passe plus par la droite A. Au point où elle rencontre cette droite on mène une tangente à cette section ; elle détermine avec la droite A la position du plan tangent pour tous les points situés sur cette droite.

Note 22, Page 341.

Cinq conditions suffisent pour déterminer une section conique : dans la parabole, on sait que le centre est situé à l'infini : il ne faut donc plus que quatre conditions pour déterminer une parabole. Ainsi, lorsqu'il s'agit de cette courbe, on n'a besoin que de quatre points pour résoudre les problèmes des pages 339 et 341.

Note 23, Page 397.

Sur les rayons et lignes de courbures des surfaces du second degré.

1° Dans toute ligne du second degré le rayon de courbure en un point quelconque est égal

au carré du demi-diamètre conjugué à ce point, divisé par leur distance.

2° Dans toute surface du second degré le rayon de courbure *maximum* en un point quelconque est égal au carré du demi-grand axe principal de la section conjuguée à ce point, divisée par la distance du point au plan de section ; le rayon *minimum* est égal au carré du demi-petit axe principal de cette section divisée par la même distance.

Il faut remarquer que le rayon *minimum* doit s'entendre dans le sens algébrique, et alors les quantités négatives sont au-dessous de zéro ; c'est par le signe des rayons de courbure qu'on peut juger de la courbure de la surface, relativement au plan tangent.

3° La droite qui, par un point de la surface, est menée parallèlement au grand axe du plan conjugué est tangente à la ligne de moindre courbure en ce point; et celle qui est parallèle au petit axe est tangente à la ligne de plus grande courbure.

4° Dans une section oblique le rayon de courbure est la projection du rayon de courbure de la section normale ayant même tangente; cette propriété existe pour une surface quelconque.

Ceci est extrait des développemens de géométrie de M. le baron C. Dupin, l'ouvrage le plus remarquable qu'on ait publié sur la théorie des contacts et des courbures.

NOTE 24, PAGE 358.

Formules pour les changemens de coordonnées.

Soient M et A deux points réunis par une ligne brisée, composée de deux parties désignées par x et y et par une seconde brisée x' et y' dans le même plan que la première; menons dans ce plan par le point A, une droite perpendiculaire à la droite x; projetons sur cette perpendiculaire les deux lignes brisées, on aura évidemment

$$y \sin.(y, x) = n' \sin.(x', x) + y' \sin.(y', x)$$
$$x \sin.(y, x) = x' \sin.(x', y) + y' \sin.(y', y)$$

y, x désigne l'angle que font les droites y et x et ainsi des autres.

Soient M et A réunies par une ligne brisée gauche en trois parties x, y, z, et par une seconde ligne brisée gauche x', y', z'; par le point A, menons au plan passant par x et y, une perpendiculaire et projetons sur cette perpendiculaire les lignes brisées, on aura

$$z \sin.(z, xy) = x' \sin.(x', xy) + y' \sin.(y', xy) + z' \sin.(z', xy)$$

et par analogie

$$y \sin.(y, xz) = x' \sin.(x', xz) + y' \sin.(y', xz) + z' \sin.(z'; xz)$$
$$x \sin.(x, yz) = x' \sin.(x', yz) + y' \sin.(y' yz) + z' \sin.(z', yz)$$

z, xy désigne l'angle que fait la droite z avec le plan xy et ainsi des autres.

Telles sont les formules pour les *coordonnées parallèles*; on en conclut facilement celles qui sont relatives aux coordonnées polaires;

supposons que les trois lignes x, y, z, sont deux à deux, à angle droit

soit $\mathrm{AM} = r$

$\psi =$ angle de r avec sa projection sur xy

$\varphi =$ angle de cette projection avec x

on aura $z = r \sin. \psi$

$y = r \cos. \psi \sin. \varphi$

$x = r \cos. \psi \cos. \varphi$

FIN DES NOTES.

TABLE 1.

CONVERSION DES ANCIENNES MESURES LINÉAIRES EN NOUVELLES.

NOMBRE.	TOISES. — Mètres.	PIEDS. — Mètres.	POUCES. — Mètres.	LIGNES. — Mètres.	POINTS. — Mètres.
1	1,94901984	0,32483664	0,02706972	0,00225581	0,00018798
2	3,89803968	0,64967328	0,05413944	0,00451162	0,00037597
3	5,84705952	0,97450992	0,08120916	0,00676743	0,00056395
4	7,79607936	1,29934656	0,10827888	0,00902324	0,00075194
5	9,74509920	1,62418320	0,13534860	0,01127905	0,00093992
6	11,69411904	1,94901984	0,16241832	0,01353486	0,00112790
7	13,64313888		0,18948804	0,01579067	0,00131589
8	15,59215872		0,21655776	0,01804648	0,00150387
9	17,54117856		0,24362748	0,02030229	0,00169186
10	19,49019840		0,27069720	0,02255810	0,00187984
11	21,43921824		0,29776692	0,02481391	0,00206782
12	23,38823808		0,32483664	0,02706972	0,00225581

TABLE 2.

CONVERSION DES MÈTRES, DÉCIMÈTRES, CENTIMÈTRES, ETC., EN PIEDS, POUCES, LIGNES.

NOMBRE.	MÈTRES.					DÉCIMÈTRES.				CENTIMÈTRES.			MILLI-MÈTRES.		DÉCI-MILLIM^{s}.
	Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.	Pouces.	Lignes.	Points.	Lignes.	Points.	Points.
1	0	3	0	11	3,552	0	3	8	3,9552	0	4	5,1955	0	5,31955	0,531955
2	1	0	1	10	7,104	0	7	4	7,910	0	8	10,391	0	10,639	1,063
3	1	3	2	9	10,656	0	11	0	11,866	1	1	3,586	1	3,958	1,594
4	2	0	3	9	2,208	1	2	9	3,821	1	5	8,782	1	9,278	2,127
5	2	3	4	8	5,760	1	6	5	7,776	1	10	1,977	2	2,597	2,659
6	3	0	5	7	9,312	1	10	1	11,731	2	2	7,173	2	7,917	3,191
7	3	3	6	7	0,864	2	1	10	3,686	2	7	0,368	3	1,236	3,723
8	4	0	7	6	4,416	2	5	6	7,641	2	11	5,564	3	6,556	4,255
9	4	3	8	5	7,968	2	9	2	11,596	3	3	10,759	3	11,875	4,797
10	5	0	9	4	11,520	3	0	11	3,557	3	8	3,955	4	5,195	5,319

TABLE 3.

CONVERSION DES TOISES-CARRÉES, TOISES-PIEDS, TOISES-POUCES, TOISES-LIGNES, TOISES-POINTS, EN MÈTRES CARRÉS ET PARTIES DÉCIMALES DU MÈTRE CARRÉ.

Valeur très-approchée $1^{TT} = 3^{MM}$, 79867833671362256.

NOMBRE.	TOISES-CARRÉES. — Mètres-carrés.	TOISES-PIEDS. — Mètres-carrés.	TOISES-POUCES. — Mètres-carrés.	TOISES-LIGNES. — Mètres-carrés.	TOISES-POINTS. — Mètres-carrés.
1	3,79867833 36	0,63311305 6	0,05275942 88	0,00439661 84	0,00036638 432
2	7,59735667	1,26622611	0,10551884	0,00879323	0,00073277
3	11,39603500	1,89933916	0,15827826	0,01318985	0,00109915
4	15,19471334	2,53245222	0,21103768	0,01758647	0,00146553
5	18,99339168	3,16556528	0,26379710	0,02198309	0,00183192
6	22,79207001	3,79867833	0,31655652	0,02637970	0,00219830
7	26,59074835		0,36931594	0,03077632	0,00256468
8	30,38942668		0,42207536	0,03517294	0,00293107
9	34,18810502		0,47483478	0,03956956	0,00329745
10	37,98678336		0,52759420	8,04396618	0,00366384
11	41,78546169		0,58035362	0,04836280	0,00403022
12	45,58414003		0,63311305	0,05275941	0,00430661

Nota. En doublant les toises-pouces on obtient les pieds-carrés; en doublant les toises-points, on obtient les pouces carrés.

TABLE

CONVERSION DES MÈTRES CARRÉS EN

Valeur très-approchée. $1^{MM} — 0^{TT}, 1^{TP}$,

NOMBRE.	MÈTRES CARRÉS. Toises-carrées.	Toises-pieds.	Toises-pouces.	Toises-lignes.	Toises-points.	DÉCIMÈTRES CARRÉS. Toises-carrées.	Toises-pieds.	Toises-pouces.	Toises-lignes.	Toises-points.
1	0	1	6	11	5,3242	0	0	0	2	3,2932
2	0	3	1	10	10,6484	0	0	0	4	6,5864
3	0	4	8	10	3,9726	0	0	0	6	9,8797
4	0	6	3	9	9,2968	0	0	0	9	1,1729
5	1	1	10	9	2,6211	0	0	0	11	4,4662
6	1	3	5	8	7,9453	0	0	1	1	7,7594
7	1	5	0	8	1,2695	0	0	1	3	11,0526
8	2	0	7	7	6,5937	0	0	1	6	2,3459
9	2	2	2	6	11,9179	0	0	1	8	5,6391
10	2	3	9	6	5,2422	0	0	1	10	8,9324
20	5	1	7	0	10,4844	0	0	3	9	5,8648
30	7	5	4	7	3,7266	0	0	5	8	2,7972
40	10	3	2	1	8,9688	0	0	7	6	11,7296
50	13	0	11	8	2,2110	0	0	9	5	8,6621
60	15	2	9	2	7,4532	0	0	11	4	5,5945
70	18	2	6	9	0,6954	0	1	1	3	2,5269
80	21	0	4	3	5,9376	0	1	3	1	11,4593
90	23	4	1	9	11,1798	0	1	5	0	8,3917
100	26	1	11	4	4,4220	0	1	6	11	5,3242

4.

TOISES-CARRÉES, TOISES-PIEDS, TOISES-POUCES.

6^{Tpo}, 11^{Tl}, 5^{Tpts}, 32421688348.

CENTIMÈTRES CARRÉS.					MILLIMÈTRES CARRÉS.				
Toises-carrées.	Toises-pieds.	Toises-pouces.	Toises-lignes.	Toises-points.	Toises-carrées.	Toises-pieds.	Toises-pouces.	Toises-lignes.	Toises-points.
0	0	0	0	0,2729	0	0	0	0	0,0027
0	0	0	0	0,5457	0	0	0	0	0,0054
0	0	0	0	0,8188	0	0	0	0	0,0082
0	0	0	0	1,0917	0	0	0	0	0,0108
0	0	0	0	1,3646	0	0	0	0	0,0135
0	0	0	0	1,6375	0	0	0	0	0,0163
0	0	0	0	1,9105	0	0	0	0	0,0191
0	0	0	0	2,1834	0	0	0	0	0,0218
0	0	0	0	2,4563	0	0	0	0	0,0245
0	0	0	0	2,7293	0	0	0	0	0,0273
0	0	0	0	5,4586	0	0	0	0	0,0546
0	0	0	0	8,1879	0	0	0	0	0,0819
0	0	0	0	10,9172	0	0	0	0	0,1092
0	0	0	1	1,6466	0	0	0	0	0,1365
0	0	0	1	4,3759	0	0	0	0	0,1638
0	0	0	1	7,1052	0	0	0	0	0,1911
0	0	0	1	9,8345	0	0	0	0	0,2184
0	0	0	2	0,5638	0	0	0	0	0,2457
0	0	0	2	3,2932	0	0	0	0	0,2730

TABLE 5.

SYSTÈME DES MESURES MÉTRIQUES DE FRANCE.

Q = QUART DU MÉRIDIEN = 5130740 TOISES DU PÉROU.

MÈTRE.	ARE.	LITRE.	GRAMME.
$\left(\frac{Q}{1,0^7}\right)^1$	$100\left(\frac{Q}{1,0^7}\right)^2$	$\frac{1}{1000}\left(\frac{Q}{1,0^7}\right)^3$	$\frac{1}{1000000}\left(\frac{Q}{1,0^7}\right)^3$

MESURES LINÉAIRES.

1000 MÈTRES. OU KILOMÈTRE.	PIEDS LINÉAIRES.	TOISES LINÉAIRES.
	3078,44400000	513,07400000

MESURES DE SUPERFICIE.

100 ARES OU HECTARE.	PIEDS CARRÉS.	TOISES CARRÉES.
	94768,17464000	2632,44925555

MESURES DE CAPACITÉ.

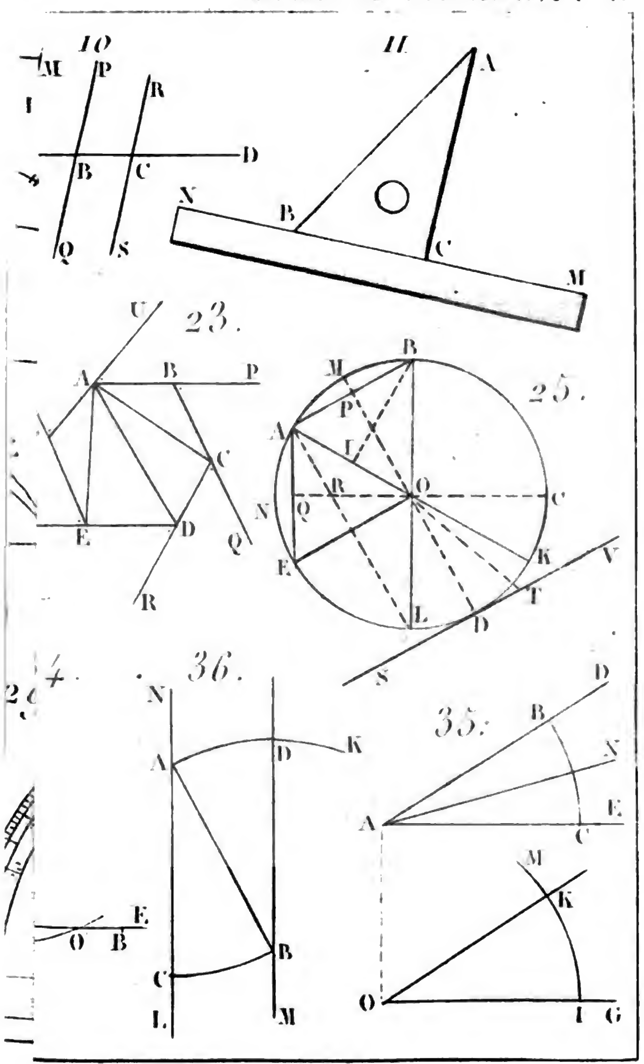
100 LITRES OU HECTOLITRE.	POUCES CUBES.	PIEDS CUBES.
	5041,24160007	,91738518

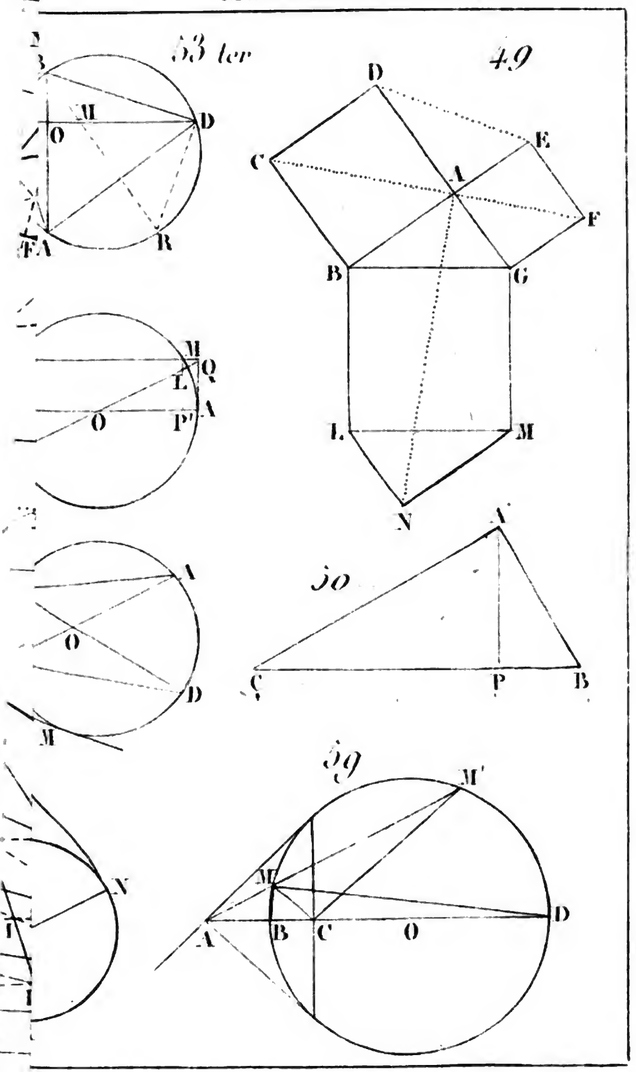
MESURES DE POIDS.

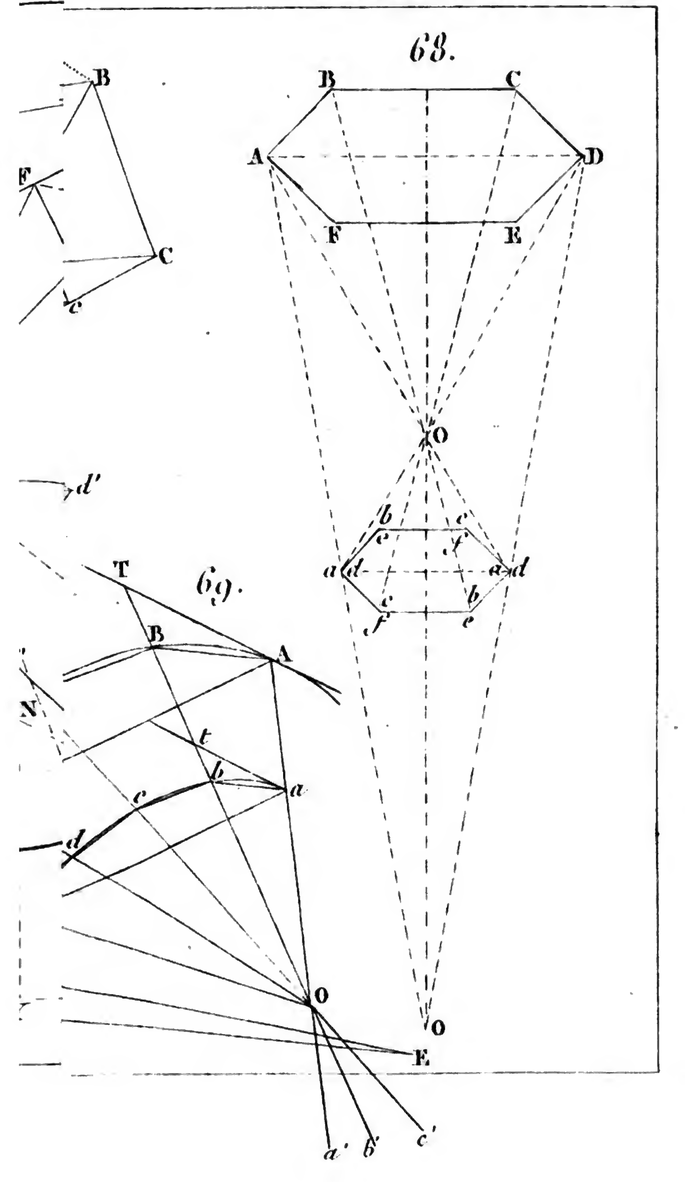
1000 GRAMMES OU KILOGRAMME.	PIEDS CUBES D'EAU.	LIVRES DE MARCS.
	50,41241600	2,04235960

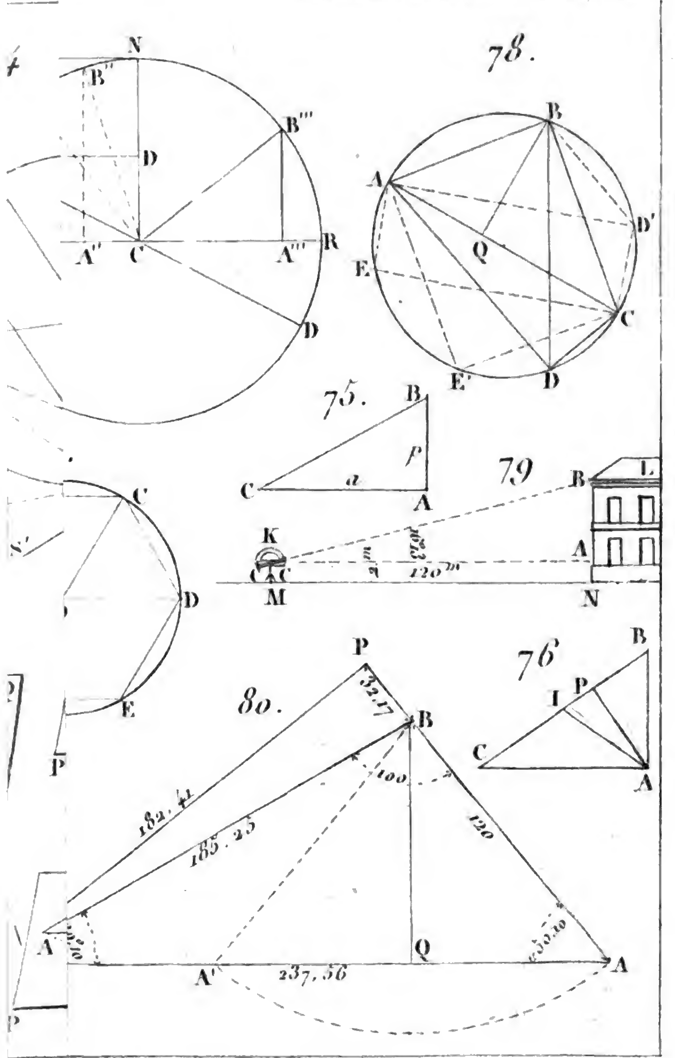
TABLE 6.

LOGARITHMES CONSTANS POUR CONVERTIR		
	EN GRADES LES	LES GRADES EN
Degrés.	0,04575,74906	9,95424,25094
Minutes. . . .	8,26760,62402	1,73239,37598
Secondes. . . .	6,48945,49899	3,51054,50101
	EN DÉCIMALES DU JOUR LES	LES DÉCIMALES DU JOUR EN
Heures.	9,61978,87583	0,38021,12417
Minutes	7,84163,75079	2,15836,24921
Secondes. . . .	5,06348,62575	4,93651,37425
	EN MÈTRES LES	LES MÈTRES EN
Toises	0,28981,99927	9,71018,00073
Pieds.	9,51166,87423	0,48833,12576
Pouces	8,43248,74963	1,56751,25037
Lignes	7,35330,62503	2,64669,37497
	EN GRAMMES LES	LES GRAMMES EN
Livres	2,68975,90199	7,31024,19801
Onces . . . . ,	1,48563,80372	8,51436,19628
Gros	0,58254,80503	9,41745,19497
Grains	8,72521,55538	1,27478,44462

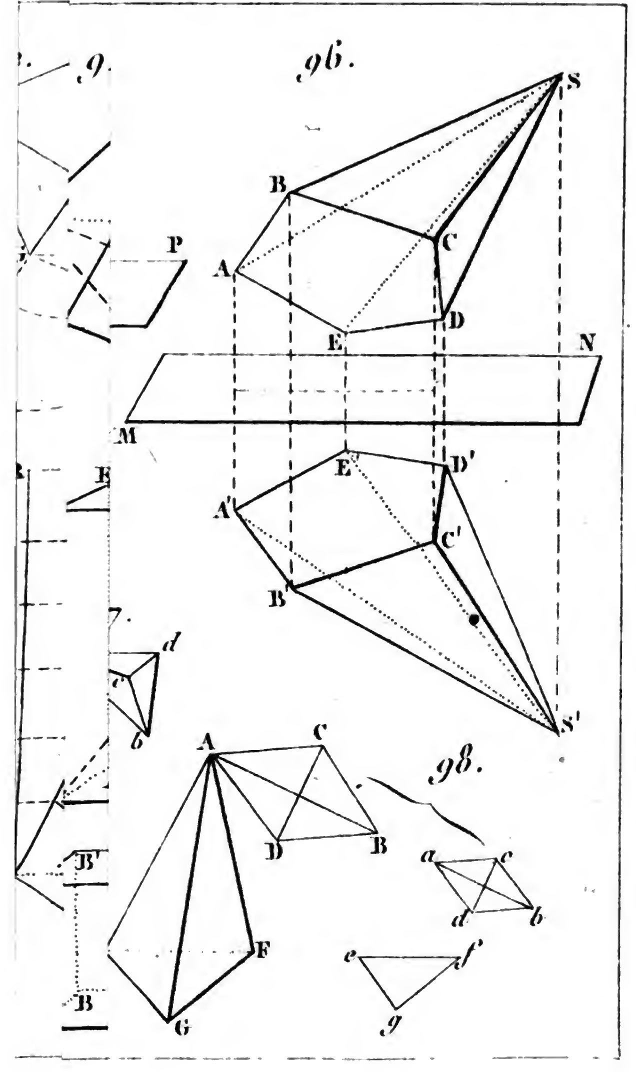

10
M
P
R
B
C
D
Q
S
11
A
N
B
C
M
23.
U
A
B
P
C
E
D
Q
R
25.
B
M
P
A
I
R
O
N
Q
C
E
K
V
T
L
D
S
36.
N
A
D
K
B
C
L
M
35.
D
B
N
E
A
C
M
K
O
I
G
E
O
B


53 ter
B
M
O
D
F A
R
49
D
E
C
A
F
B
G
L
M
N
M
Q
L
O
P'
A
A
O
D
M
50
A
C
P
B
59
M'
M
A
B
C
O
D
N
I
I


68.
B
C
A
D
F
E
O
b
c
e
f
a
d
a
d
c
b
f
e
O
69.
T
B
A
N
t
b
a
c
d
O
E
a'
b'
c'
B
F
C
c
d'



78.
75.
79
76
80.
N
B''
B'''
D
A''
C
A'''
R
A
B
D'
Q
E
C
E'
B
P
a
K
L
M
N
I
182. 41
185. 25
32.17
100
120
237. 56
A'



96.
S
B
C
P
A
D
E
N
M
E'
D'
A'
C'
B'
S'
d
c
b
A
C
98.
D
B
a
c
d
b
F
e
f
g
G
B'
B

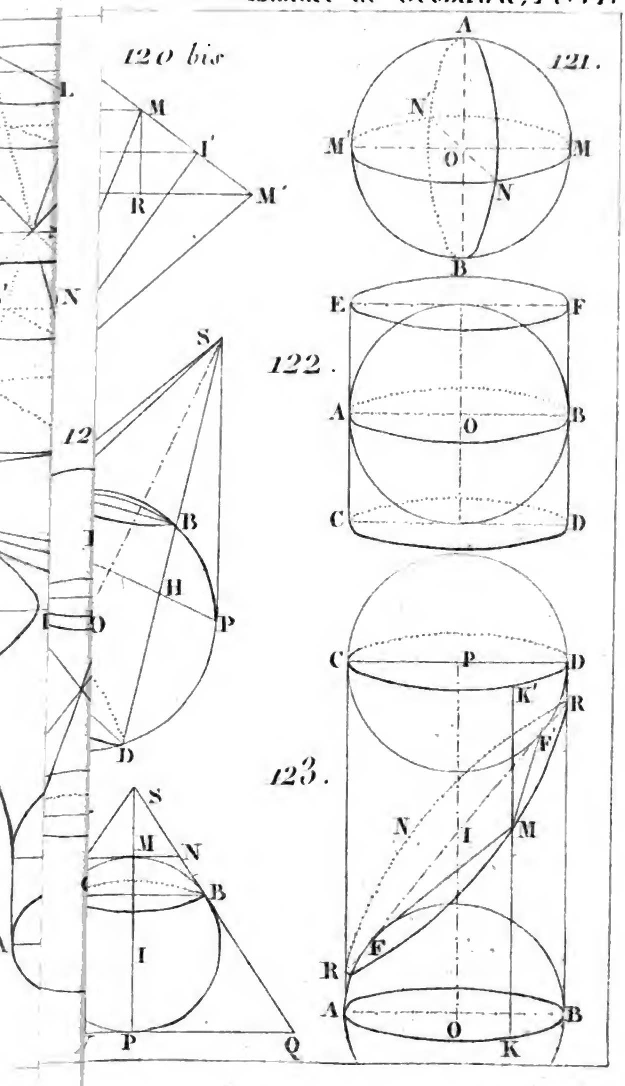
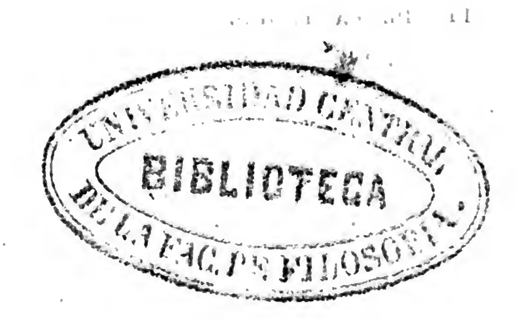

120 bis
M
I'
R
M'
121.
A
N'
M'
O
M
N
B
122.
E
F
A
O
B
C
D
S
12
B
H
P
D
123.
C
P
D
K'
R
F'
N
I
M
F
R
A
O
B
K
S
M
N
B
I
P
Q

TABLE DES MATIÈRES.

Nota. **Les numéros renvoient aux pages.**

FIN DE LA TABLE.


UNIVERSIDAD CENTRAL
BIBLIOTECA
DE LA FAC. DE FILOSOFIA

